УДК 517.925

С. Е. ТЕМИРБОЛАТ, Н. А. ОРШУБЕКОВ

КОРРЕКТНОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Исследуется смешанная задача для бипараболического уравнения, когда в граничных условиях нарушается условие однородности. Выделяются корректный и некорректный варианты задачи. Получен явный вид решения этих задач.

Постановка задачи. В области $D=\{t>0, x>0, y\in R\}$ ищем решение бипараболического уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-2\frac{\partial}{\partial t}\Delta+\Delta^2\right)u(t,x,y)=0 \tag{1}$$

с нулевыми начальными

$$u(0,x,y)=0,\ \ u_t(0,x,y)=0, \tag{2}$$

и граничными данными вида

$$\begin{cases}\left(\gamma\delta+\beta\delta\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}\right)u(t,x,y)\Big|_{x=0}=f_1(t,y),\\ u(t,x,y)\big|_{x=0}+\left[\alpha\delta+\gamma\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right]u(t,x,y)\Big|_{x=0}=f_2(t,y),\end{cases} \tag{3}$$

где α,β,γ – пока произвольные константы, $f_1(t,y)$, $f_2(t,y)$ – известные достаточно гладкие функции, $\delta=\partial_t-\partial_y^2$.

Следуя методике [1] применяя интегральные преобразования Фурье $\Phi_y^+(\xi)$ и Лапласа $\Lambda_t^+(p)$ придем к краевой задаче для ОДУ

$$\frac{d^4V(p,x,\xi)}{dx^4} - 2\left(p+\xi^2\right)\frac{d^2V(p,x,\xi)}{dx^2} + \left(p+\xi^2\right)^2 V(p,x,\xi) = 0,\ \ x>0, \tag{4}$$

$$\left(\gamma\left(p+\xi^2\right) + \beta\left(p+\xi^2\right)\frac{d}{dx} + \frac{d^3}{dx^3}\right)V(p,x,\xi)\Big|_{x=0} = \tilde{f}_1(p,\xi),$$

$$V(p,x,\xi)\Big|_{x=0} + \left(\alpha\left(p+\xi^2\right) + \gamma\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}\right)V(p,x,\xi)\Big|_{x=0} = \tilde{f}_2(p,\xi), \tag{5}$$

где $V(p,x,\xi) = \Phi_y^+(\xi)\Lambda_t^+(p)u(t,x,y),\ \ \tilde{f}_s(p,i\xi) = \Phi_y^+(\xi)\Lambda_t^+(p)f_s(t,y),\ \ s=1,2$.

Напишем общее ограниченное решение дифференциального уравнения (4)

$$V(p,x,\xi) = C_1 e^{-\sqrt{p+\xi^2}\,x} + C_2 x e^{-\sqrt{p+\xi^2}\,x}, \tag{6}$$

где C_1, C_2 – произвольные функции, зависящие от параметров p и ξ.

В силу условия (5) получаем систему линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.)

$$FC = \tilde{f}, \tag{7}$$

здесь и далее введены обозначения

$$F = \begin{Vmatrix} \gamma\eta - (\beta+1)\eta^{\frac{3}{2}} & (\beta+3)\eta \\ 1+\alpha\eta-\gamma\sqrt{\eta}+\eta & \gamma - 2\sqrt{\eta} \end{Vmatrix},\ C = (C_1, C_2),\ \tilde{f}(p,\xi) = \left(\tilde{f}_1(p,\xi), \tilde{f}_2(p,\xi)\right),\ \eta = p+\xi^2.$$

Таким образом, вопрос корректности краевой задачи (1), (2), (3) свели к исследованию системы (7). Если выполнено одно из следующих условий

$$\beta \neq \gamma^2 - 3,\ \text{или}\ \beta \neq \frac{3\alpha+1}{1-\alpha}, \tag{8}$$

то $\det F \neq 0$.

В данном случае, находим обычное решение системы (7)

$$\begin{cases} C_1^K(p,\xi) = \dfrac{\left(\gamma - 2\sqrt{\eta}\right)\tilde{f}_1(p,\xi) - \eta(\beta+3)\tilde{f}_2(p,\xi)}{\eta\left(\gamma^2-\beta-3\right) + \eta^2(\beta-\alpha\beta-3\alpha-1)}, \\ C_2^K(p,\xi) = \dfrac{\left(\gamma\eta - (\beta+1)\eta^{\frac{3}{2}}\right)\tilde{f}_2(p,\xi) - \left(1+\alpha\eta-\gamma\sqrt{\eta}+\eta\right)\tilde{f}_1(p,\xi)}{\eta\left(\gamma^2-\beta-3\right) + \eta^2(\beta-\alpha\beta-3\alpha-1)}. \end{cases} \tag{9}$$

Следовательно, решение краевой задачи (4), (5) в корректном варианте принимает вид

$$V_K(p,x,\xi)=\frac{\left(\left(\gamma-2\sqrt{\eta}\right)\tilde{f}_1(p,\xi)-\eta(\beta+3)\tilde{f}_2(p,\xi)\right)e^{-\sqrt{p+\xi^2}x}}{\eta\left(\gamma^2-\beta-3\right)+\eta^2(\beta-\alpha\beta-3\alpha-1)}+$$

$$+\frac{x\left(\left(\gamma\eta-(\beta+1)\eta^{\frac{3}{2}}\right)\tilde{f}_2(p,\xi)-\left(1-\gamma\sqrt{\eta}+(\alpha+1)\eta\right)\tilde{f}_1(p,\xi)\right)e^{-\sqrt{p+\xi^2}x}}{\eta\left(\gamma^2-\beta-3\right)+\eta^2(\beta-\alpha\beta-3\alpha-1)}. \qquad (10)$$

Условие некорректности ($\det F=0$) определяется равенствами

$$H=\left\{\left(\gamma^2=\frac{4}{1-\alpha}\right)\mathrm{I}\left(\beta=\frac{3\alpha+1}{1-\alpha}\right),\ \alpha\in(-\infty,1)\right\}. \qquad (11)$$

Требуя дополнительно ограничение на правые части из граничного условия (5)

$$\frac{\tilde{f}_1(p,\xi)}{\gamma^2\eta}=-\frac{\tilde{f}_2(p,\xi)}{\gamma-2\sqrt{\eta}}, \qquad (12)$$

находим нормальное решение [2] с.л.а.у. (7):

$$\begin{cases}\tilde{C}_1^H(p,\xi)=\dfrac{\left(\gamma-\left(\gamma^2-2\right)\sqrt{\eta}\right)\tilde{f}_1(p,\xi)}{\eta\left[\gamma^4+\gamma^2-2\gamma\left(\gamma^2-2\right)\sqrt{\eta}+\left(\gamma^2-2\right)^2\eta\right]},\\[2ex] \tilde{C}_2^H(p,\xi)=\dfrac{\gamma^2\tilde{f}_1(p,\xi)}{\eta\left[\gamma^4+\gamma^2-2\gamma\left(\gamma^2-2\right)\sqrt{\eta}+\left(\gamma^2-2\right)^2\eta\right]},\end{cases}$$

С помощью этих величин напишем решение некорректной задачи (4), (5)

$$V_H(p,x,\xi)=\frac{\left[\left(\gamma-\left(\gamma^2-2\right)\sqrt{\eta}\right)+x\gamma^2\right]\tilde{f}_1(p,\xi)e^{-\sqrt{p+\xi^2}x}}{\eta\left[\gamma^4+\gamma^2-2\gamma\left(\gamma^2-2\right)\sqrt{\eta}+\left(\gamma^2-2\right)^2\eta\right]}. \qquad (13)$$

Объединим решение краевой задачи (4), (5) в двух вариантах

$$V(p,x,\xi)=\begin{cases}V_K(p,x,\xi), & \text{в случае } (8),\\ V_H(p,x,\xi), & \text{когда имеют место } (11),(12).\end{cases}$$

Воспользуемся обозначениями из [3, 4]

$$W_1[f(t,y),x]=-2\int_0^t d\tau\int_R f(\tau,\eta)G(t-\tau,x,y-\eta)d\eta, \qquad W_2[f(t,y),x]=\frac{\partial}{\partial x}\left(W_1[f(t,y),x]\right),$$

$$\delta^{-\gamma}[f(t,y)]=\int_0^t d\tau\int_R f(\tau,\eta)\frac{(t-\tau)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}G(t-\tau,x,y-\eta)d\eta,$$

$$\delta^{\gamma}[\bullet]=\delta^{[\gamma]+1}\left[\delta^{-1+\{\gamma\}}[\bullet]\right],\ \gamma=[\gamma]+\{\gamma\}>0,\ \delta=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

последние два соотношения принято называть параболическими операторами дробного порядка. Теперь займемся вычислением оригиналов

1. Равенство (10) перепишем по другому

$$\left[(\beta-\alpha\beta-3\alpha-1)\eta^2+\eta\left(\gamma^2-\beta-3\right)\right] V_K(p,x,\xi)=$$

$$=\gamma\tilde{f}_1(p,\xi)e^{-\sqrt{p+\xi^2}x}+2\frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde{f}_1(p,\xi)e^{-\sqrt{p+\xi^2}x}\right]-(\beta+3)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\tilde{f}_2(p,\xi)e^{-\sqrt{p+\xi^2}x}\right]+$$

$$+\gamma x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\tilde{f}_2(p,\xi)e^{-\sqrt{p+\xi^2}x}\right]+(\beta+1)x\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left[\tilde{f}_2(p,\xi)e^{-\sqrt{p+\xi^2}x}\right]-x\left[\tilde{f}_1(p,\xi)e^{-\sqrt{p+\xi^2}x}\right]+$$

$$+\gamma x\frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde{f}_1(p,\xi)e^{-\sqrt{p+\xi^2}x}\right]-(\alpha+1)x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\tilde{f}_1(p,\xi)e^{-\sqrt{p+\xi^2}x}\right]. \qquad (14)$$

Пусть имеют место оба условия (8), тогда применив к (14) обратные интегральные преобразования придем к задаче Коши для бикалорического уравнения [5]

$$\begin{cases}(\beta-\alpha\beta-3\alpha-1)\delta^2 u_K(t,x,y)+\left(\gamma^2-\beta-3\right)\delta u_K(t,x,y)=g_1(t,x,y),\\ (\beta-\alpha\beta-3\alpha-1)\delta u_K(0,x,y)+\left(\gamma^2-\beta-3\right)u_K(0,x,y)=0,\end{cases} \qquad (15)$$

где правая часть уравнения

$$g_1(t,x,y)=\gamma W_2(f_1(t,y),x)+2\frac{\partial}{\partial x}\{W_2(f_1(t,y),x)\}-(\beta+3)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{W_2(f_2(t,y),x)\}+$$

$$+\gamma x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{W_2(f_2(t,y),x)\}+(\beta+1)x\frac{\partial^3}{\partial x^3}\{W_2(f_2(t,y),x)\}-x\frac{\partial}{\partial x}\{W_2(f_1(t,y),x)\}+$$

$$+\gamma x\frac{\partial}{\partial x}\{W_2(f_1(t,y),x)\}-(\alpha+1)x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{W_2(f_1(t,y),x)\}.$$

Отсюда получаем задачу Коши для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases}\delta u_K(t,x,y)+\dfrac{\left(\gamma^2-\beta-3\right)}{(\beta-\alpha\beta-3\alpha-1)}u_K(t,x,y)=\Phi(t,x,y),\\ u_K(0,x,y)=0,\end{cases}$$

где $\Phi(t,x,y)=\dfrac{1}{(\beta-\alpha\beta-3\alpha-1)}\displaystyle\int_0^t d\tau\int_R\frac{g_1(\tau,x,\eta)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}}$.

Решением последней является функция

$$u_K(t,x,y)=\int_0^t d\tau\int_R\frac{\Phi(\tau,x,\eta)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}-\frac{\left(\gamma^2-\beta-3\right)}{(\beta-\alpha\beta-3\alpha-1)}(t-\tau)\right]d\eta. \qquad (16)$$

Таким образом нами доказана

Теорема 1. Краевая задача (1)–(3), когда имеет место (8), однозначно разрешима и ее решение определяется формулой (16).

2. В некорректном варианте сначала обратим условие разрешимости (12).

$$f_2(t,y) = -\frac{1}{\gamma}\delta^{-1}(f_1(t,y)) + \frac{2}{\gamma^2}\delta^{-\frac{1}{2}}(f_1(t,y)). \tag{12'}$$

Далее находим оригинал решения исходной задачи. Для этого преобразуем выражение (13)

$$\left((\gamma^2-2)^2\eta + (\gamma^2 - i\gamma)^2\right)\left((\gamma^2-2)^2\eta + (\gamma^2+i\gamma)^2\right)V_H(p,x,\xi) =$$

$$= \frac{(\gamma + x\gamma^2)(\gamma^4+\gamma^2)\tilde{f}_1(p,\xi)e^{-\sqrt{p+\xi^2}x}}{\eta} + \frac{(\gamma^2-2)(2\gamma^3 x - \gamma^4 + \gamma^2)\tilde{f}_1(p,\xi)e^{-\sqrt{p+\xi^2}x}}{\sqrt{\eta}} +$$

$$+(\gamma^2-2)^2(x\gamma^2-\gamma)\tilde{f}_1(p,\xi)e^{-\sqrt{p+\xi^2}x} + (\gamma^2-2)^3\sqrt{\eta}\tilde{f}_1(p,\xi)e^{-\sqrt{p+\xi^2}x}.$$

Опять получаем задачу Коши для одномерного неоднородного бикалорического уравнения

$$\begin{cases}\left((\gamma^2-2)^2\delta + (\gamma^2-i\gamma)^2\right)\left\{(\gamma^2-2)^2\delta u_H(t,x,y) + (\gamma^2+i\gamma)^2 u_H(t,x,y)\right\} = g_2(t,x,y),\\ \delta u(t,x,y)\big|_{t=0} = 0,\ u(t,x,y)\big|_{t=0} = 0,\end{cases} \tag{17}$$

где

$$g_2(t,x,y) = (\gamma + x\gamma^2)(\gamma^4+\gamma^2)\delta^{-1}(f_1(t,y),x) + (\gamma^2-2)(2\gamma^3x - \gamma^4+\gamma^2)\{W_1(f_1(t,y),x)\} +$$

$$+(\gamma^2-2)^2(x\gamma^2-\gamma)\{W_2(f_1(t,y),x)\} + (\gamma^2-2)^3\frac{\partial}{\partial x}\{W_1(f_1(t,y),x)\},$$

$$\gamma^2 \neq 2.$$

Введя новую функцию

$$W(t,x,y) = (\gamma^2-2)^2\delta u_H(t,x,y) + (\gamma^2+i\gamma)^2 u_H(t,x,y),$$

упростим задачу (17):

$$\begin{cases}\left((\gamma^2-2)^2\delta + (\gamma^2-i\gamma)^2\right)W(t,x,y) = g_2(t,x,y),\\ W(t,x,y)\big|_{t=0} = 0.\end{cases}$$

Решение последней определяется формулой

$$W(t,x,y) = \frac{1}{(\gamma^2-2)^2}\int_0^t d\tau \int_R \frac{g_2(\tau,x,z)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(y-z)^2}{4(t-\tau)} - \frac{(\gamma^2-i\gamma)}{(\gamma^2-2)^2}(t-\tau)\right)dz.$$

Теперь из задачи

$$\begin{cases}(\gamma^2-2)^2\delta u_H(t,x,y) + (\gamma^2+i\gamma)^2 u_H(t,x,y) = W(t,x,y),\\ u_H(t,x,y)\big|_{t=0} = 0,\end{cases}$$

определим решение исходной задачи

$$u_H(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_R \frac{W(\tau,x,z)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(y-z)^2}{4(t-\tau)} - \frac{(\gamma^2+i\gamma)}{(\gamma^2-2)^2}(t-\tau)\right]dz. \tag{18}$$

Таким образом нами доказана.

Теорема 2. Нормальное решение краевой задачи (1)–(3), в случае некорректности (11), когда справедливо условие разрешимости (12'), представляется с помощью интеграла (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темирболат С.Е.* Конструирование и решение некорректных краевых задач. Алматы: ?аза? университеті, 2003. 128 с.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1988. 552 с.
3. *Базарбаева С.Е.* О разрешимости смешанных задач для системы дифференциальных уравнений тепло- и массообмена: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1982. 144 с.
4. *Ким Е.И.* Об условиях разрешимости одной граничной задачи уравнения теплопроводности // ДАН СССР. 1961. Т. 140, № 3. С. 553-556.
5. *Сулханишвили Г.И.* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 12. С. 2258-2266.

Резюме

Шекаралық шартта біртектілік шарты бұзылған жағдайдағы бипараболалық теңдеуге қойылған аралас есеп зерттеледі. Есептің қисынды және қисынды емес қойылымдары анықталып, екі жағдайда да шешімнің айқын түрі анықталады.

Summary

A mixed problem for biparabolic equation subject to breaking homogeneity under boundary conditions is investigated. Correct and incorrect variants of the problem are considered. Explicit solutions of the problems have been derived.

Казахский национальный
университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Поступила 16.04.07г.