УДК 517.956, 517.957

*А. Т. АСАНОВА*

# О НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Рассматривается нелокальная краевая задача с данными на характеристиках для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа со смешанной производной. С помощью метода введения функциональных параметров получены достаточные условия однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи для гиперболической системы интегро-дифференциальных уравнений в терминах исходных данных и предложен алгоритм нахождения ее решения.

Рассматривается нелокальная краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа со смешанной производной в прямоугольной области $\overline{\Omega}=[0,T]\times[0,\omega]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}+C(t,x)u+f(t,x)+$$

$$+\int_0^T\left[K_0(t,\tau,x)\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x}+K_1(t,\tau,x)\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial t}+K_2(t,\tau,x)u(\tau,x)\right]d\tau, \tag{1}$$

$$u(t,0)=\psi(t), \quad t\in[0,T], \tag{2}$$

$$P_2(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x}+P_1(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial t}+P_0(x)u(0,x)+S_2(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x}+S_1(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial t}+S_0(x)u(T,x)=\varphi(x),$$

$$x\in[0,\omega], \tag{3}$$

где $u\in R^n$, $(n\times n)$ - матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $P_2(x)$, $P_1(x)$, $P_0(x)$, $S_2(x)$, $S_1(x)$, $S_0(x)$, $n$-вектор-функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ непрерывны на $\overline{\Omega}$ и $[0,\omega]$, соответственно, $(n\times n)$ - матрицы $K_0(t,\tau,x)$, $K_1(t,\tau,x)$, $K_2(t,\tau,x)$ непрерывны на $[0,T]\times[0,T]\times[0,\omega]$, $n$- вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$.

Пусть $C(\overline{\Omega},R^n)$ - пространство непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $u:\overline{\Omega}\to R^n$ с нормой $\|u\|_0=\max\limits_{(t,x)\in\overline{\Omega}}\|u(t,x)\|$.

Функция $u(t,x)\in C(\overline{\Omega},R^n)$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\in C(\overline{\Omega},R^n)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\in C(\overline{\Omega},R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x\partial t}\in C(\overline{\Omega},R^n)$ называется классическим решением задачи (1)-(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(t,x)\in\overline{\Omega}$ и краевым условиям (2), (3).

Исследуются вопросы существования, единственности классического решения краевой задачи (1)-(3). Линейные и нелинейные гиперболические уравнения со смешанными производными второго порядка от двух независимых переменных применяются при рассмотрении процессов сушки воздушным потоком и изоэнтропического одномерного плоского течения в газовой динамике, в динамике и кинетике сорбции газов при линейной и нелинейной изотерме, при описании кинетики фильтрационного осветления малоконцентрированных водных суспензий на водоочистных фильтрах. Системы таких уравнений появляются при исследовании движения адсорбируемых смесей веществ, состоящих из многих компонент, через пористую предварительно насыщенную одним или несколькими веществами среду для малых или больших концентраций адсорбируемых веществ при постоянной или переменной скорости фильтрации. При изучении ударных волн в упругой или вязкопластической среде используются гиперболические интегро-дифференциальные уравнения со смешанной частной производной. К интегро-дифференциальным уравнениям гиперболического типа приводят также математическое моделирование процессов, происходящих в вязкой жидкости, колебания валов и мостов, изгибы балок на упругих основаниях и др.

В последние годы активно развивается теория нелокальных краевых задач для гиперболических уравнений со смешанными производными, которое стимулировалось соображениями общей теории граничных задач, развитием теории физики плазмы и влагопереноса. Нелокальные краевые условия - это условия, связывающие искомое решение и его производные в двух и более отрезках линий. Простейшим примером нелокальных условий являются периодические краевые условия.

В работах [1-3] для исследования и решения нелокальной краевой задачи для системы гиперболических уравнений со смешанной производной (1) при отсутствии интегрального слагаемого с условиями (2), (3) был разработан метод введения функциональных параметров. Метод введения функциональных параметров развивает идеи метода параметризации [4], созданного для решения двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, на гиперболические системы. Метод параметризации позволил установить коэффициентные необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и предложить алгоритм его нахождения. Условие (3) является общим линейным нелокальным условием, связывающим значения искомой функции и ее производных по $x$ и $t$ на характеристиках $t = 0$, $t = T$. С помощью метода введения функциональных параметров были получены достаточные условия однозначной классической разрешимости задачи (1)-(3) в терминах исходных данных и предложен алгоритм нахождения ее решения. Суть метода введения функциональных параметров заключается в сведении исходной задачи к многохарактеристической краевой задаче с функциональными параметрами для системы гиперболических уравнений со смешанной производной. При этом алгоритм нахождения решения задачи состоит из двух этапов: 1) нахождение введенных функциональных параметров; 2) нахождение решений задач Гурса на малых областях. Функциональные параметры определяются из функционального соотношения, а решения задач Гурса на малых областях - из эквивалентных систем интегральных уравнений. В работах [5-7] было установлено, что эти условия являются также и необходимыми для корректной разрешимости нелокальной краевой задачи (1)-(3). Разработанный метод был применен к исследованию краевой задачи с данными на характеристиках для систем квазилинейных гиперболических уравнений со смешанной производной [8], а также к ряду нелокальных краевых задач.

В настоящей работе метод введения функциональных параметров применяется к исследованию краевой задачи (1)-(3). На основе этого метода устанавливаются коэффициентные достаточные условия существования единственного классического решения и предлагается алгоритм его нахождения.

Приведем схему метода в случае отсутствия разбиения и основной результат. Обозначим через $\lambda(x)$ значение функции $u(t,x)$ при $t = 0$ и в задаче (1)-(3) осуществим замену $u(t,x) = \widetilde{u}(t,x) + \lambda(x)$. Тогда задача (1)-(3) перейдет к следующей эквивалентной задаче с функциональным параметром

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + C(t,x)\widetilde{u} + f(t,x) +$$

$$+\int_0^T \left[ K_0(t,\tau,x)\frac{\partial \widetilde{u}(\tau,x)}{\partial x} + K_1(t,\tau,x)\frac{\partial \widetilde{u}(\tau,x)}{\partial t} + K_2(t,\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x) \right] d\tau +$$

$$+ A(t,x)\lambda'(x) + C(t,x)\lambda(x) + \int_0^T \left[ K_0(t,\tau,x)\lambda'(x) + K_2(t,\tau,x)\lambda(x) \right] d\tau, \qquad (4)$$

$$\widetilde{u}(0,x) = 0, \quad x \in [0,\omega], \qquad (5)$$

$$\widetilde{u}(t,0)=\psi(t)-\psi(0), \quad t\in[0,T], \tag{6}$$

$$[P_2(x)+S_2(x)]\lambda'(x)+S_2(x)\frac{\partial\widetilde{u}(T,x)}{\partial x}+P_1(x)\frac{\partial\widetilde{u}(0,x)}{\partial t}+S_1(x)\frac{\partial\widetilde{u}(T,x)}{\partial t}+$$

$$+[P_0(x)+S_0(x)]\lambda(x)+S_0(x)\widetilde{u}(T,x)=\varphi(x),\ x\in[0,\omega]. \tag{7}$$

Задача (4)-(7) эквивалентна задаче (1)-(3) в том смысле, если $u^*(t,x)$ - классическое решение задачи (1)-(3), то пара $(\widetilde{u}^*(t,x),\lambda^*(x))$ будет решением задачи (4)-(7), и наоборот, если $(\widetilde{u}^*(t,x),\lambda^*(x))$ - решение задачи (4)-(7), то функция $u^*(t,x)=\widetilde{u}^*(t,x)+\lambda^*(x)$ будет классическим решением задачи (1)–(3).

При фиксированных $\lambda$ задача (4)-(6) является задачей Гурса, причем в точке (0,0) должно выполняться условие согласования: $\lambda(0)=\psi(0)$. Введем обозначения: $\widetilde{v}(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial x}$, $\widetilde{w}(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial t}$.

Задача Гурса эквивалентна системе трех интегральных уравнений

$$\widetilde{v}(t,x)=\int_0^t\big[A(\tau,x)\widetilde{v}(\tau,x)+B(\tau,x)\widetilde{w}(\tau,x)+C(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x)+f(\tau,x)\big]d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^T\big[K_0(\tau,\tau_1,x)\widetilde{v}(\tau_1,x)+K_1(\tau,\tau_1,x)\widetilde{w}(\tau_1,x)+K_2(\tau,\tau_1,x)\widetilde{u}(\tau_1,x)\big]d\tau_1 d\tau+$$

$$+\int_0^t\left[\left\{A(\tau,x)+\int_0^T K_0(\tau,\tau_1,x)d\tau_1\right\}\lambda'(x)+\left\{C(\tau,x)+\int_0^T K_2(\tau,\tau_1,x)d\tau_1\right\}\lambda(x)\right]d\tau, \tag{8}$$

$$\widetilde{w}(t,x)=\dot{\psi}(t)+\int_0^x\big[A(t,\xi)\widetilde{v}(t,\xi)+B(t,\xi)\widetilde{w}(t,\xi)+C(t,\xi)\widetilde{u}(t,\xi)+f(t,\xi)\big]d\xi+$$

$$+\int_0^x\int_0^T\big[K_0(t,\tau,\xi)\widetilde{v}(\tau,\xi)+K_1(t,\tau,\xi)\widetilde{w}(\tau,\xi)+K_2(t,\tau,\xi)\widetilde{u}(\tau,\xi)\big]d\tau d\xi+$$

$$+\int_0^x\left[\left\{A(t,\xi)+\int_0^T K_0(t,\tau,\xi)d\tau\right\}\lambda'(\xi)+\left\{C(t,x)+\int_0^T K_2(t,\tau,\xi)d\tau\right\}\lambda(\xi)\right]d\xi, \tag{9}$$

$$\widetilde{u}(t,x)=\int_0^t\int_0^x\big[A(\tau,\xi)\widetilde{v}(\tau,\xi)+B(\tau,\xi)\widetilde{w}(\tau,\xi)+C(\tau,\xi)\widetilde{u}(\tau,\xi)+f(\tau,\xi)\big]d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^T\big[K_0(\tau,\tau_1,\xi)\widetilde{v}(\tau_1,\xi)+K_1(\tau,\tau_1,\xi)\widetilde{w}(\tau_1,\xi)+K_2(\tau,\tau_1,\xi)\widetilde{u}(\tau_1,\xi)\big]d\tau_1 d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\left[\left\{A(\tau,\xi)+\int_0^T K_0(\tau,\tau_1,\xi)d\tau_1\right\}\lambda'(\xi)+\left\{C(\tau,x)+\int_0^T K_2(\tau,\tau_1,\xi)d\tau_1\right\}\lambda(\xi)\right]d\xi d\tau+\psi(t)-\psi(0). \tag{10}$$

Подставив значение $\widetilde{v}(T,x)$ из (8) в соотношение (7) получим

$$\left[P_2(x)+S_2(x)+S_2(x)\int_0^T\left\{A(\tau,x)+\int_0^T K_0(\tau,\tau_1,x)d\tau_1\right\}d\tau\right]\lambda'(x)=$$

$$-\left[P_0(x)+S_0(x)+S_2(x)\int_0^T\left\{C(\tau,x)+\int_0^T K_2(\tau,\tau_1,x)d\tau_1\right\}d\tau\right]\lambda(x)-$$

$$-S_2(x)\left\{\int_0^{Tt}\left[A(\tau,x)\tilde{v}(\tau,x)+B(\tau,x)\tilde{w}(\tau,x)+C(\tau,x)\tilde{u}(\tau,x)\right]d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_0^T\int_0^T\left[K_0(\tau,\tau_1,x)\tilde{v}(\tau_1,x)+K_1(\tau,\tau_1,x)\tilde{w}(\tau_1,x)+K_2(\tau,\tau_1,x)\tilde{u}(\tau_1,x)\right]d\tau_1 d\tau\right\}-$$

$$-P_1(x)\tilde{w}(0,x)-S_1(x)\tilde{w}(T,x)-S_0(x)\tilde{u}(T,x)-S_2(x)\int_0^T f(\tau,x)d\tau+\varphi(x), \tag{11}$$

с условием

$$\lambda(0)=\psi(0). \tag{12}$$

Соотношение (11) при фиксированных $\tilde{v}(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)$, $\tilde{u}(t,x)$ является системой обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной для неизвестной функции $\lambda(x)$.

Если известна функция $\lambda(x)$ (и его производная $\lambda'(x)$), то решая задачу Гурса (4)-(6) найдем $\tilde{u}(t,x)$ (и его производные $\tilde{v}(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)$) для всех $(t,x)\in\overline{\Omega}$. Если известна функция $\tilde{u}(t,x)$ (и его производные $\tilde{v}(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)$), то из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11) с условием (12) определяем функцию $\lambda'(x)$ и его первообразную $\lambda(x)$. Затем складывая их находим $u(t,x)=\tilde{u}(t,x)+\lambda(x)$, которая будет классическим решением задачи (1)-(3).

Здесь неизвестными являются как функция $\tilde{u}(t,x)$, так и функция $\lambda(x)$. Поэтому применяется итерационный метод и решение задачи (4)-(7), соответственно задачи (1)-(3), находится по следующему алгоритму:

0-Шаг. Полагая в правой части системы (11) $\lambda(x)=\psi(0)$, $\tilde{v}(t,x)=0$, $\tilde{u}(t,x)=\psi(t)-\psi(0)$, $\tilde{w}(t,x)=\dot{\psi}(t)$ и предполагая обратимость матрицы $Q(x)=P_2(x)+S_2(x)+$ $+S_2(x)\int_0^T\left\{A(\tau,x)+\int_0^T K_0(\tau,\tau_1,x)d\tau_1\right\}d\tau$ для всех $x\in[0,\omega]$ определяем $\lambda^{(0)}{}'(x)$, $x\in[0,\omega]$.

С учетом условия (13) находим $\lambda^{(0)}(x)$: $\lambda^{(0)}(x)=\psi(0)+\int_0^x\lambda^{(0)}{}'(\xi)d\xi$.

В системе интегральных уравнений (8)-(10) считая в правой части $\lambda'(x)=\lambda^{(0)}{}'(x)$, $\lambda(x)=\lambda^{(0)}(x)$, находим $\tilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\tilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\tilde{w}^{(0)}(t,x)$, $(t,x)\in\overline{\Omega}$.

1-Шаг. Полагая в правой части системы (11) $\lambda(x)=\lambda^{(0)}(x)$, $\tilde{v}(t,x)=\tilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\tilde{u}(t,x)=\tilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)=\tilde{w}^{(0)}(t,x)$, определяем $\lambda^{(1)}{}'(x)$, $x\in[0,\omega]$. С учетом условия (12) находим $\lambda^{(1)}(x)$: $\lambda^{(1)}(x)=\psi(0)+\int_0^x\lambda^{(1)}{}'(\xi)d\xi$. В системе интегральных уравнений (8)-(10) считая в правой части $\lambda'(x)=\lambda^{(1)}{}'(x)$, $\lambda(x)=\lambda^{(1)}(x)$, находим $\tilde{v}^{(1)}(t,x)$, $\tilde{u}^{(1)}(t,x)$, $\tilde{w}^{(1)}(t,x)$, $(t,x)\in\overline{\Omega}$.

И т.д., на $k$-шаге находим $\lambda^{(k)}{}'(x)$, $\lambda^{(k)}(x)$, $\tilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\tilde{u}^{(k)}(t,x)$, $\tilde{w}^{(k)}(t,x)$, $k=0,1,2,\dots$ .

Достаточные условия сходимости предложенного алгоритма и существование единственного классического решения задачи (1)-(3) обеспечивает

**Теорема.** *Пусть матрица $Q(x)$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$ выполнены условия:*

*а)* $\|[Q(x)]^{-1}\|\le\gamma(x)$, *где* $\gamma(x)$ *- непрерывная на* $[0,\omega]$ *функция;*

*b)* $q_1(T,x)=\exp\{\alpha(x)T\}\cdot T^2\cdot\beta(x)\le\sigma_1<1,$

*c)* $$q_2(T,x)=\frac{\exp\{\alpha(x)T\}-1+q_1(T,x)}{1-q_1(T,x)}\cdot\gamma(x)\cdot\|S_2(x)\|\cdot T[\alpha(x)+\beta(x)T]\le\sigma_2<1,$$

*где* $\alpha(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}\|A(t,x)\|$, $\beta(x)=\max\limits_{(t,\tau)\in[0,T]\times[0,T]}\|K_0(t,\tau,x)\|$, $\sigma_1$, $\sigma_2$ *- const.*

*Тогда задача (1)-(3) имеет единственное классическое решение.*

Доказательство теоремы аналогично схеме доказательства теоремы 2 из [3] и проводится по вышеприведенному алгоритму с учетом специфики системы (1).

**Заключение.** Получены достаточные условия однозначной разрешимости краевой задачи с данными на характеристиках для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа в терминах коэффициентов системы и матриц граничного условия. Рассмотренная постановка задачи обобщает ранее исследованную в [2-3] нелокальную краевую задачу для систем гиперболических уравнений со смешанной производной. Предлагаемый в данной работе алгоритм можно упростить при выполнении условия а) теоремы и других условий, заменяющих условия b)-c).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джумабаев Д.С., Асанова А.Т.* Метод параметризации применительно к полупериодической краевой задаче для гиперболического уравнения // Известия МО и Н РК. Сер. физ.-матем. 2001. № 1. С. 23-29.

2. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 11. С. 1673-1685.3. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2003. Т.39. № 10. С. 1343-1354.

4. *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 1. С. 50-66.

5. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Критерий корректной разрешимости краевой задачи для системы гиперболических уравнений // Известия МОиН РК, НАН РК. Сер. физ.-матем. 2002. № 3. С. 20-26.

6. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доклады РАН. 2003. Т. 391. № 3. С. 295-297.

7. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 3. С. 337-346.

8. *Асанова А.Т.* О нелокальной краевой задаче для систем квазилинейных гиперболических уравнений // Доклады РАН. 2006. Т. 411. № 1. С.1-5.

**Резюме**

Аралас туындылы гиперболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін мәндері характеристикаларда берілген бейлокал шеттік есеп қарастырылады. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің гиперболалық жүйесі үшін бейлокал шеттік есептің бірмәнді шешілімдігінің жеткілікті шарттары бастапқы берілімдер терминінде функционалдық параметрлер енгізу әдісінің көмегімен алынған және ол шешімді табудың алгоритмі ұсынылған.

**Summary**

The non-local boundary value problem with data on characteristics for system of integral-differential equations of hyperbolic type with mixed derivative are considered. The sufficient conditions of unique solvability non-local boundary value problem for system of hyperbolic of integral-differential equations with mixed derivative in the terms initial data are obtained with help of method of introduction functional parameters and algorithm finding their solution are proposed.

*Институт математики МОН РК, г. Алматы*

*Поступила 8.10.07г.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фридман А* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. С. 427.

2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А. Уральева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

3. *Орынбасаров М.* О разрешимости краевых задач для параболического и полипараболического уравнений в нецилиндрической области с негладкими боковыми границами // Дифференциальное уравнение. Т. 30, № 1. 1994. С. 61-71.

4. *Орынбасаров М.* Построение фундаментального решения одного выраждающегося параболического уравнения и дифференцируемость Ф. Р. // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. 2007. №1. С. 19-27.

**Резюме**

Параболалық потенциалдар және сингулярлы интегралдық теңдеулер әдісімен шекарасы тегіс емес облыста айнымалы коэффициентті ерекшеленген параболалық теңдеу үшін шекаралық есептің регулярлы шешімінің бар болуы дәлелденген.

**Summary**

In given clause methods of parabolic potentials and sanguinary the integrated equations prove existence regular the decision of a regional task for the degenerating parabolic equation with variable factors in not cylindrical area with rough border.

*КазНУ им. аль-Фараби*

*П о с т у п и л а*
*28.09.07г.*