УДК 517.958: 530.145.6

Н. К. БЛИЕВ, К. Р. ЕСМАХАНОВА

МЕТОД $\bar{\partial}$-ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ (2+1)-МЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Построено представление Лакса для (2+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера методом $\bar{\partial}$-проблемы в основе которого лежит нелокальная задача Римана–Гильберта.

По мере развития теории солитонов совершенствуются методы построения и исследования интегрируемых нелинейных уравнений известных также под названием солитонных уравнений. Особый интерес представляют многомерные интегрируемые системы, содержащие производные более чем по двум пространственным переменным. В настоящее время существуют различные методы построения и исследования интегрируемых солитонных уравнений. Одним из эффективных методов теории солитонов является метод нелокальной $\bar{\partial}$-проблемы. Он позволяет одновременно построить уравнение, его представления Лакса, точные решения и т.д. Метод $\bar{\partial}$-проблемы естественным образом обобщает нелокальную задачу Римана и представляет собой весьма удобный аппарат для получения точных решений многомерных и двумерных интегрируемых уравнений [1]. В дальнейшем он был применен к некоторым важным задачам теории солитонов [2]. В данной работе метода $\bar{\partial}$-проблемы применяется и к изучению одного из многомерных интегрируемых уравнений, а именно, к (2+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера. Используя метода $\bar{\partial}$-проблемы выводим представление Лакса для нелинейного уравнения Шредингера, которое имеет вид

$$iq_t + q_{yy} + vq = 0, \quad ip_t - p_{yy} - vp = 0, \tag{1a}$$

$$2v_x + v_y = -2(pq)_y, \tag{1b}$$

где q, p и v являются комплексными функциями. Уравнения (1) удовлетворяют граничным условиям: $q \to 0,\ p \to 0,\ v \to 0,$ при $x, y \to \pm\infty$.

Исходя из физического приложения обычно полагается, что $p = \bar{q}$ (случай притяжения) и $p = -\bar{q}$ (случай отталкивания). При этом потенциальная функция v будет вещественной. Уравнение (1) описывает волновые явления в нелинейной оптике и в других разделах физики. В тоже время оно представляет собой достаточно универсальную модель нелинейного уравнения. Система (1) интегрируется с помощью представления Лакса:

$$\alpha\psi_y = 2H_2\psi_x + H_1\psi, \tag{2a}$$

$$\psi_t = 4iH_2\psi_{xx} + 2iH_1\psi_x + H_0\psi, \tag{2b}$$

где

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ H_1 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ p & 0 \end{pmatrix}, \ H_0 = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Здесь функции h_{ij} определяются соотношениями

$$h_{12} = i\alpha q, \ h_{21} = i(2p_x - \alpha p_y),$$

$$\alpha h_{11y} = -\frac{1}{2}\alpha(pq)_y,$$

$$\alpha h_{22y} + 2h_{22x} = \frac{1}{2}[\alpha(pq)_y - 2(pq)_x]. \tag{4}$$

В уравнений (1) функция v выражается через h_{ij}. В дальнейшем мы рассматриваем одно из обобщений уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial\bar{\lambda}} = f, \tag{5}$$

а именно, следующую матричную нелокальную $\bar{\partial}$-проблему

$$\frac{\partial W(\lambda, \bar{\lambda})}{\partial\bar{\lambda}} = \tag{6}$$

$$= \iint_G W(\lambda, \bar{\lambda}) R(\mu, \bar{\mu}, \lambda, \bar{\lambda}) d\mu \wedge d\bar{\mu} + W'(\lambda, \bar{\lambda}),$$

где W, W' и R являются матричнозначными функциями. При этом свободный член W' и ядро R являются известными функциями. Мы обозначим область (обычно, предполагаем просто односвязной) на плоскости через G, а ее кусочно гладкую и с положительной ориентацией границу обозначим через $\partial G = \Gamma$. Полную комплексную плоскость обозначим через E. Для интегрирования по области будем использовать стандартную меру Лебега

$$d\lambda \wedge d\bar{\lambda} = -2i d\lambda_R \wedge d\lambda_I,$$

где $\wedge$ символ означает внешнее произведение.

В общем случае, решение интегрального уравнения (6) можно представить в виде

$$W(\lambda, \bar{\lambda}) = V(\lambda, \bar{\lambda}) + F(\lambda) + \tag{7}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \iint_G \frac{d\lambda' \wedge d\bar{\lambda}'}{\lambda' - \lambda} \iint_G W(\lambda, \bar{\lambda}) R(\mu, \bar{\mu}, \lambda', \bar{\lambda}') d\mu \wedge d\bar{\mu},$$

где $V(\lambda, \bar{\lambda})$ произвольная матричная функция, являющаяся решением $\bar{\partial}$-уравнения $W' = \frac{\partial V(\lambda, \bar{\lambda})}{\partial\bar{\lambda}}$. Заметим, что поскольку имеет место формула (7), только сингулярная часть $V(\lambda, \bar{\lambda})$ дает вклад в свободный член в $\bar{\partial}$-проблеме (7). В наших дальнейших построениях, чтобы уравнение (7) было интегральным уравнением Фредгольма второго рода, мы полагаем, что ядро $R(\mu, \bar{\mu}, \lambda', \bar{\lambda}')$ должно быть со слабой особенностью. Таким образом неоднородное интегральное уравнение (7) однозначно разрешимо в пределах некоторого класса функции $W(\lambda, \overline{\lambda})$, по крайней мере, для ядра R маленького в норме [1].

Теперь рассмотрим однородный случай интегрального уравнения (6), т.е. следующую $\overline{\partial}$-проблему:

$$\frac{\partial W(\lambda,\overline{\lambda})}{\partial \overline{\lambda}} = \hat{R}W \equiv W * R, \tag{8}$$

где $\hat{R}$ – линейный оператор, который действует следующим образом:

$$(\hat{R}W)(\lambda,\overline{\lambda}) = (W * R)(\lambda,\overline{\lambda})$$

$$\iint_G W(\lambda,\overline{\lambda}) R(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}) d\mu \wedge d\overline{\mu}. \tag{9}$$

Здесь W и R являются 2×2 матричнозначными функциями. Рассмотрим уравнение (8) с дополнительным условием $W(\infty) = 1$ т.е.

$$W(\lambda) = 1 + \lambda^{-1} W_{-1} + \lambda^{-2} W_{-2} + \lambda^{-3} W_{-3} + \dots \tag{10}$$

Мы предполагаем, что $\overline{\partial}$-проблема (8) однозначно разрешима с дополнительным условием (10).

В нашем случае целью метода $\overline{\partial}$-одевания является построение совместной системы линейных уравнений для W и, следовательно нелинейного дифференциального уравнения (1), связанного с $\overline{\partial}$-проблемой (8) [2-4]. Дополнительно вводим зависимость от новых переменных x_1, x_2, x_3 в формуле (8), т.е. ядро R зависит от $\lambda', \overline{\lambda}'; \lambda, \overline{\lambda}, x_1, x_2, x_3$. Согласно основной идее метода обратной задачи рассеяния, оператор $\hat{R}$ или эквивалентное ему ядро $R(\lambda', \overline{\lambda}'; \lambda, \overline{\lambda}, x_1, x_2, x_3)$ относительно переменных x_1, x_2, x_3, должно быть системой линейных и разрешимых уравнений. Таким образом, предположим, что выполняется следующее условие [1]:

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial x_i} + [\hat{B}_i, \hat{R}] = 0, \tag{11}$$

где $\hat{B}_i$ $(i = 1,2,3)$ – произвольные операторы.

Для (2+1)–мерного нелинейного уравнения Шредингера (1) зависимость ядра R от переменных x, y и t имеет форму

$$R(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}; x,y,t) =$$

$$= e^{F(\mu,x,y,t)} R_0(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}) e^{-F(\lambda,x,y,t)}, \tag{12}$$

где R_0 является произвольной 2×2 матричнозначной функцией и

$$F(\mu,x,y,t) = i\mu I x + \frac{2i\mu}{\alpha} H_2 y - 4i\mu^2 H_2 t. \tag{13}$$

Здесь I – единичная матрица и H_2 – матрица задается формулой (3).

Ядро $R(\mu,\overline{\mu},\lambda,\overline{\lambda}; x,y,t)$ вида (12) удовлетворяет уравнению (11). Для уравнения (1) выбор попарно коммутирующихся операторов $\hat{B}_i$ $(i = 1,2,3)$ – выглядят в следующем виде:

$$\hat{B}_1 = i\lambda I, \ \hat{B}_2 = \frac{2i\lambda}{\alpha} H_2, \ \hat{B}_3 = -4i\lambda^2 H_2. \tag{14}$$

Введем дифференциальные операторы D_i согласно формуле $D_i = \partial_{x_i} + \hat{B}_i$, $(i = 1,2,3)$. В нашем случае операторы D_i имеют вид

$$D_1 f = \partial_x f + i\lambda f I, \quad D_2 f = \partial_y f + \frac{2i\lambda}{\alpha} f H_2,$$

$$D_3 f = \partial_t f - 4i\lambda^2 f H_2. \tag{15}$$

Выражение (11) может быть записано в виде

$$[D_i, \hat{R}] = 0. \tag{16}$$

Операторы (15) являются коммутирующими между собой, т.е. $[D_i, D_k] = 0$. Применяя операторы D_i к формуле (8), имеем

$$D_i\left(\frac{\partial W}{\partial \overline{\lambda}}\right) = D_i (W * R).$$

Теперь применяем общую схему $\overline{\partial}$-проблемы и построим линейные задачи, связанные с уравнением (1). Для этого мы должны построить операторы L_1 и L_2, которые должны удовлетворять условиям

$$\left[\frac{\partial}{\partial \overline{\lambda}}, L_i\right] W = 0, \tag{17}$$

$$(L_i W)(\lambda)\big|_{\lambda\to\infty} \to 0. \tag{18}$$

Однозначная разрешимость $\bar{\partial}$-проблемы (8) и условие (18) подразумевает, что для таких операторов L_i имеем

$$L_i W = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) показывает важность операторов L_i, которые удовлетворяют условиям (17) и (18). С помощью таких операторов мы можем построить систему линейных дифференциальных уравнений, соответствующих (2+1)-мерному нелинейному уравнению Шредингера (1). Таким образом сформулируем следующую теорему.

Теорема. Система линейных уравнений для $W(\lambda, \bar{\lambda})$, удовлетворяющая условиям (17) и (18) имеет вид

$$L_1 W = \alpha D_2 W - 2H_2 D_1 W - H_1 W = 0, \quad (20)$$

$$L_2 W = D_3 W - 4iH_2 D_1^2 W - 2iH_1 D_1 W - H_0 W = 0. \quad (21)$$

Доказательство. Заметим, что $D_1 W$ и $D_2 W$ имеют сингулярность первого порядка при $\lambda \to \infty$. В то же время их линейная комбинация может не иметь такую сингулярность. В самом деле, легко показать, что

$$\alpha D_2 W - 2H_2 D_1 W = $$
$$= \alpha \partial_y W - 2H_2 \partial_x W - 2i\lambda[H_2, W]. \quad (22)$$

Теперь вместо $D_i W$ в уравнение (22) подставляем выражения (15), соответственно, и вместо W его разложение (10). Тогда при $\lambda \to \infty$ имеем

$$\alpha D_2 W - 2H_2 D_1 W \to -2i[H_2, W_{-1}]. \quad (23)$$

Если добавим член $-H_1 W$ в правую сторону формулы (23), тогда имеем

$$\alpha D_2 W - 2H_2 D_1 W - H_1 W \to 0. \quad (24)$$

Отсюда, используя разложение (10) при $\lambda \to \infty$, получим

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ p & 0 \end{pmatrix} = -2i[H_2, W_{-1}] = -2i(W_{-1})_{off} = $$
$$= -2i\begin{pmatrix} 0 & (W_{-1})_{12} \\ -(W_{-1})_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где $(W_{-1})_{off}$ –антидиагональная часть и $(W_{-1})_{diag}$ – диагональная часть матрицы W в обозначении $W_{-1} = (W_{-1})_{diag} + (W_{-1})_{off}$. Правая сторона формулы (24) удовлетворяет условиям (17) и (18). Таким образом, мы получим первое уравнение линейной системы в виде (20). Теперь, для коэффициентов при степенях λ с учетом (15) и (10) имеем

λ^{-1}: (26a)

$$\alpha W_{-1y} - 2H_2 W_{-1x} - 2i[H_2, W_{-2}] - H_1 W_{-1} = 0,$$

λ^{-2}: (26b)

$$\alpha W_{-2y} - 2H_2 W_{-2x} - 2i[H_2, W_{-3}] - H_1 W_{-2} = 0,$$

и т.д.

Далее мы переходим к построению второго уравнения линейной системы, т.е. представления Лакса. Его находим аналогичным способом. Сингулярность второго порядка в величине $D_3 W$ может компенсироваться с добавлением члена – $4iH_2 D_1^2 W$, т.е.

$$D_3 W - 4iH_2 D_1^2 W = \partial_t W - 4iH_2 \partial_x^2 W + $$
$$+ 8\lambda H_2 \partial_x W + 4i\lambda^2 [H_2, W]. \quad (27)$$

Однако, слагаемое $4i\lambda^2[H_2, W]$ при асимптотическом разложении (10) вносит вклад только в сингулярность первого рода при $\lambda \to \infty$. Чтобы избавиться от этой сингулярности первого порядка, в формулу (27) добавим член $-2iH_1 D_1 W$. Потребуем, что выполняется тождество

$$D_3 W - 4iH_2 D_1^2 W - 2iH_1 D_1 W = $$
$$= \partial_t W - 4iH_2 \partial_x^2 W + 8\lambda H_2 \partial_x W + 4i\lambda^2 [H_2, W] - $$
$$- 2iH_1 \partial_x W - 2i\lambda H_1 W. \quad (28)$$

Если использовать формулу (10), то уравнение (28) не имеет сингулярность первого порядка при $\lambda \to \infty$. Наконец, чтобы удовлетворялось условие (18), в формулу (28) добавим член – $H_0 W$. В результате, при $\lambda \to \infty$ имеем

$$D_3 W - 4iH_2 D_1^2 W - 2iH_1 D_1 W - H_0 W \to 0. \quad (29)$$

Отсюда используя формулу (15), получим

$$W_e - 4iH_2 W_{xx} + 8\lambda H_2 W_x + 4i\lambda^2 [H_2, W] - $$
$$- 2iH_1 W_x + 2\lambda H_1 W - H_0 W \to 0. \quad (30)$$

Теперь с учетом формулы (10) при $\lambda \to \infty$ имеем

$$H_0 = 8H_2W_{-1x} + 4i[H_2, W_{-2}] + 2H_1W_{-1}. \quad (31)$$

Из формулы (26а) и (28) следует, что

$$2i[H_2, W_{-2}] = \alpha W_{-1y} - 2H_2W_{-1x} - H_1W_{-1}. \quad (32)$$

Подставляя эту формулу в (31), находим, что

$$H_0 = 2(\alpha\partial_y + 2H_2\partial_x)W_{-1}. \quad (33)$$

Введем обозначение $(W_{-1})_{diag} = iC$. Используя (25), из формулы (33) найдем

$$H_0 = 2i\left(\alpha\partial_y + 2H_2\partial_x\right)\left(C + \frac{1}{2}\sigma_3 H_1\right). \quad (34)$$

Здесь диагональная 2×2 матрица C на самом деле связана с антидиагональной матрицей H_1. Действительно, рассматривая диагональную часть уравнения (26а) и используя формулу (25) находим

$$\alpha C_y - 2H_2C_x = -\frac{1}{2}\sigma_3 H_1^2. \quad (35)$$

Теперь в формулу (29) подставляем значение H_0 (34). В результате имеем

$$D_3W - 4iH_2D_1^2W - 2iH_1D_1W -$$

$$-2i\left(\alpha\partial_y + 2H_2\partial_x\right)\left(C + \frac{1}{2}\sigma_3 H_1\right)W = 0.$$

Таким образом, второе ожидаемое уравнение линейной системы имеет вид (21). Уравнения (20) и (21) вместе дают ожидаемую линейную систему для матричной функции $W(\lambda, \overline{\lambda})$. При этом условие совместности этих уравнений $[L_1, L_2]W = 0$ эквивалентно уравнению (1). Теорема доказана.

Лемма. Система линейных дифференциальных уравнений (20) и (21) преобразуется формулой

$$\psi = We^{F(\lambda,x,y,t)}$$

к стандартной форме представления Лакса (2) для (2+1)-мерного уравнения типа Шредингера (1).

Доказательство. Чтобы устранить зависимость от λ в формулах (20) и (21), введем функцию

$$\psi\left(\lambda, \overline{\lambda}, x, y, t\right) = W\left(\lambda, \overline{\lambda}, x, y, t\right)e^{F(\lambda,x,y,t)} =$$

$$= W\left(\lambda, \overline{\lambda}, x, y, t\right)e^{i\lambda Ix + \frac{2i\lambda}{\alpha}H_2y - 4i\lambda^2H_2t}. \quad (36)$$

Чтобы переходить от функции W в функцию ψ, от операторов D_i переходим в обычные производные ∂_{x_i} согласно формулам

$$D_iW = \partial_{x_i}\psi e^{-F}. \quad (37)$$

Тогда система уравнений (20) и (21) в терминах ψ примет вид

$$L_i\left(\partial_{x_i}\right)\psi = \sum_{n_1n_2n_3} u^{(i)}_{n_1n_2n_3}(x)\partial^{n_1}_{x_1}\partial^{n_2}_{x_2}\partial^{n_3}_{x_3}\psi = 0,$$

$$(i = 1, \ldots, k).$$

Отсюда получим систему линейных уравнений (2). Система линейных уравнений (2) является представлением Лакса для (2+1)-мерного нелинейного уравнения типа Шредингера (1). Чтобы показать это, рассмотрим условие совместности системы линейных дифференциальных уравнений (2) (т.е. $\psi_{yt} = \psi_{ty}$). Отсюда получим

$$\psi_{xxx}: \quad 8i[H_2, H_2] = 0, \quad (38a)$$

$$\psi_{xx}: \quad 4i[H_2, H_1] = 4i[H_1, H_2], \quad (38b)$$

$$\psi_x: \quad 2H_2H_{1x} + [H_2, H_0] + [H_1, H_1] =$$

$$= 4iH_2H_{1x} + \alpha H_{1x}, \quad (38c)$$

$$\psi: \quad H_{1t} + 2H_2H_{0x} + [H_1, H_0] =$$

$$= -4iH_1H_{1xx} + 2H_{1x} + \alpha H_{0y}. \quad (38d)$$

Формулы (38а) и (38b) удовлетворяются тождественно. Из (38c) после подстановки явной формы 2×2 матрицы H_i $(i = 0,1,2)$ для элементов матрицы H_0 получаем формулу (4). Из формулы (38d) после подстановки выражения для матриц H_0, H_1 и H_2 получим (2+1)-мерное нелинейное уравнение Шредингера (1). Что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Захаров В.Е., Манаков С.В.* Построение многомерных нелинейных интегрируемых систем и их решений // Фун. ан. и его прил. 1985. Т. 19. №2. С. 11-25.

2. *Zakharov V.E.* Commutating operators and nonlocal $\overline{\partial}$-problem, in: Nonlinear and turbulent process in physics, Proc. of III Int. Workshop, Naukova Dumka, Kiev, 1988. V. 1. P. 152.

3. *Bogdanov L.V., Manakov S.V.* The nonlocal $\overline{\partial}$-problem and (2+1) dimensional soliton equations // J. Phys. A: Math. Gen. 1988. **21.** L537.

4. *Fokas A.S., Zakharov V.E.* The dressing method and nonlocal Riemann-Hilbert problems // Journal of Nonlinear Sciences. 1992. V. 2. 109.

Резюме

(2+1)-өлшемді сызықты емес Шредингер теңдеуінің Лакс ұсынуын локалдық емес $\bar{\partial}$-проблема әдісін пайдаланып таптық. Локалдық емес $\bar{\partial}$-проблемасы локальдық емес Риман–Гильберт есебінің негізінде алынған.

Summary

Using the method of nonlocal $\bar{\partial}$-problem are built the Lax representation of (2+1)-dimensional nonlinear Schrodinger equation. Method of nonlocal $\bar{\partial}$-problem is generalization of the nonlocal Riemann–Hilbert problem.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 3.09.07г.