

УДК 517.958

Н. Т. ДАНАЕВ, Е. К. ЕРГАЛИЕВ

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ИТЕРАЦИОННЫХ СХЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Посвящена исследованию сходимости итерационного алгоритма для численного решения нелинейных стационарных уравнений Навье-Стокса в переменных «вектор скорости, давление». Приводятся результаты расчетов встречных течений несжимаемой жидкости в каналах конечной длины.

В прямоугольной области $D = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N\}$ рассмотрим систему уравнений Навье-Стокса.

$$(\vec{u}, \nabla) \vec{u} + \text{grad } p = \nu \Delta \vec{u} + \vec{f}, \quad (1)$$

$$\text{div} \vec{u} = 0, \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$\vec{u}|_{\partial D} = 0, \quad (3)$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ - вектор скорости, $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ - вектор-функция источников, p - давление, ν - коэффициент вязкости.

Для численного решения задачи (1)-(3) конечно-разностным методом рассмотрим итерационную схему вида

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + L_{h,m} \vec{u}_m^{n+1} + (p^n - \tau_0 \text{div}_h \vec{u}^n)_{x_m} = \nu \Delta_h \vec{u}_m^{n+1} + \tau_0 \delta (u_{m,\bar{x}_m}^{n+1} - u_{m,\bar{x}_m}^n)_{x_m} + f_m, \quad (5)$$

$$m = 1, 2, \dots, N,$$

$$\frac{p^{n+1} - p^n}{\tau_0} + \text{div}_h \vec{u}^{n+1} = 0, \quad (6)$$

с однородными краевыми условиями

$$\vec{u}^{n+1}|_{\partial D_h} = 0, \quad (7)$$

где τ, τ_0, δ - положительные итерационные параметры и предполагается, что начальные приближения p^0, \vec{u}^0 заданы.

Здесь и в далее приняты обозначения из теории разностных схем [1].

В работе [2] показано, что итерационная схема (5)-(6) в случае линейной задачи Стокса обладает свойством равномерной сходимости, т.е. скорость сходимости не зависит от количества узлов пространственной сетки.

В данной работе приводится анализ сходимости в нелинейном случае стационарных уравнений Навье-Стокса и результаты расчетов, иллюстрирующие возможности предлагаемого итерационного алгоритма.

Для погрешности решения для итерации (5)-(6) получим:

$$\frac{z_m^{n+1} - z_m^n}{\tau} + L_{h,m}(\vec{u}^n) z_m^{n+1} + L_{m,h}(\vec{z}^n) u_m + (\pi - \tau_0 \text{div}_h \vec{z}^n)_{x_m} = \nu \Delta_h z_m^{n+1} + \tau_0 \delta (z_{m\bar{x}_m}^{n+1} - z_{m\bar{x}_m}^n)_{x_m}, \quad (8)$$

$$\frac{\pi^{n+1} - \pi^n}{\tau} + \text{div}_h \vec{z}^{n+1} = 0,$$

где $z_m^n(x) = u_m^n(x) - u_m(x)$, $x \in D_{h,m}$, $\pi^n = p^n - p(x)$, $x \in D_h$.

Умножая (8) на $2\tau u_m^{n+1}$ скалярно в $L_2(D_h)$ получим, что

$$\begin{aligned} & \|\bar{z}^{n+1}\|^2 - \|\bar{z}^n\|^2 + \|\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n\|^2 + 2\tau(L_{h,\bar{u}}(\bar{z}^n)\bar{u}, \bar{z}^{n+1}) - 2\tau(\pi^n - \tau_0 \operatorname{div}_h \bar{z}^n, \operatorname{div}_h \bar{z}^{n+1}) + \\ & + 2\tau\nu \|\nabla_h \bar{z}^{n+1}\|^2 + \tau\tau_0\delta \sum_m \left(\|z_{m,x_m}^{n+1}\|^2 - \|z_{m,x_m}^n\|^2 + \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\|^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что

$$-2\tau(\pi^n - \tau_0 \operatorname{div}_h \bar{z}^n, \operatorname{div}_h \bar{z}^{n+1}) = \frac{\tau}{\tau_0} \left(\|\pi^{n+1}\|^2 - \|\pi^n\|^2 \right) + \tau\tau_0 \left(\|\operatorname{div}_h \bar{z}^n\|^2 - \|\operatorname{div}_h (\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n)\|^2 \right).$$

Проведем следующие оценки

$$\begin{aligned} \tau\tau_0 \|\operatorname{div}_h (\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n)\|^2 & \leq \tau\tau_0 N \sum_m \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\|^2, \\ 2\tau \left(L_{h,\bar{u}}(\bar{z}^n)\bar{u}, \bar{z}^{n+1} \right) & \leq 2\tau c_0 \|\nabla_h \bar{u}\| \left((1 + \varepsilon_1) \|\nabla_h \bar{z}^{n+1}\|^2 + \frac{1}{h\varepsilon_1} \|\nabla_h (\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n)\|^2 \right). \end{aligned}$$

Тогда окончательно из (9) получим, что

$$\begin{aligned} & E^{n+1} + \tau\tau_0 \|\operatorname{div}_h \bar{z}^n\|^2 + 2\tau(\nu - c_0 \|\nabla_h \bar{u}\|(1 + \varepsilon_1)) \|\nabla_h \bar{z}^{n+1}\|^2 + \\ & + \left(1 - \frac{\tau c_0 c_1 \|\nabla \bar{u}\|}{2\varepsilon_1 h^2} \right) \|\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n\|^2 + \tau\tau_0(\delta - N) \sum_m \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\|^2 \leq E^n, \end{aligned}$$

где

$$E^n = \|\bar{z}^n\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} \|\pi^n\|^2 + \tau\tau_0\delta \sum_m \|z_{m,x_m}^n\|^2.$$

Предположим, что данные заданы и параметры сетки удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \nu - c_0 \|\nabla_h \bar{u}\|(1 + \varepsilon_1) & \geq \nu_0 > 0, \\ 1 - \frac{\tau c_0 c_1 \|\nabla \bar{u}\|}{2\varepsilon_1 h^2} & \geq \nu_1 > 0, \quad \delta - N \geq \delta_1 > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда окончательно имеем, что

$$E^{n+1} + \tau\tau_0 \|\operatorname{div}_h \bar{z}^n\|^2 + 2\tau\nu_0 \|\nabla_h \bar{z}^{n+1}\|^2 + \nu_1 \|\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n\|^2 + \tau\tau_0\delta_1 \sum_m \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\|^2 \leq E^n. \quad (11)$$

Отсюда имеем, что итерации сходятся. Условия (10) равносильны условиям единственности стационарной разностной задачи. Заметим, что из сходимости итерационного процесса следует равномерная ограниченность итерации.

Далее рассмотрим скорость сходимости.

Оценим скорость сходимости процесса (8). Запишем (8) в виде

$$\tau\pi_{x_m} = \tau\nu\Delta_h \bar{z}^{n+1} + \tau\tau_0\delta \left(z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n \right)_{x_m} - \tau\tau_0 \|\operatorname{div}_h \bar{z}^n\|_{x_m} - \left(\bar{z}^{n+1} - \bar{z}^n \right) - \tau L_{h,\bar{u}}(\bar{u}^n) \bar{z}^{n+1} - \tau L_{h,m}(\bar{z}^n) u_m,$$

отсюда имеем

$$-\tau(\pi^n, \operatorname{div} \vec{\varphi}) - \tau \nu (\nabla_h \vec{z}^{n+1}, \nabla \vec{\varphi}) + \tau \tau_0 (\operatorname{div} \vec{z}^{n+1}, \operatorname{div} \vec{\varphi}) - \\ - (\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n, \vec{\varphi}) - \tau \tau_0 \delta \sum_m (z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n, \varphi_{m,x_m}) - \tau (L_{h,\vec{u}}(\vec{u}^n) \vec{z}^{n+1}, \vec{\varphi}) - \tau (L_{h,\vec{u}}(\vec{z}^n) \vec{u}, \vec{\varphi}).$$

Следовательно,

$$\tau \|\pi^n\|_{L_2(D_h)} \leq c_0 (\tau \nu \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\| + \tau \tau_0 \|\operatorname{div}_h \vec{z}^n\| + \|\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n\| + \\ + \tau \tau_0 \delta \sum_m \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\| + \tau \|\nabla_h \vec{u}^n\| \cdot \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\| + \tau \|\nabla_h \vec{u}\| \cdot \|\nabla_h \vec{z}^n\|),$$

где c_0 равномерная ограниченная константа.

Последний член в правой части оценим и представим в следующей форме

$$\tau \|\nabla_h \vec{u}\| \cdot \|\nabla_h \vec{z}^n\| \leq \tau \|\nabla_h \vec{u}\| (\|\nabla_h (\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n)\| + \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\|),$$

т.е.

$$\tau \|\pi^n\|_{L_2(D_h)} \leq c_0 (\tau \nu \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\| + \tau \tau_0 \|\operatorname{div}_h \vec{z}^n\| + \|\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n\| + \\ + \tau \tau_0 \delta \sum_m \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\| + \tau \|\nabla_h \vec{u}\| \cdot \|\nabla_h (\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n)\| + \tau (\|\nabla \vec{u}^n\| + \|\nabla \vec{u}\|) \cdot \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\|),$$

или

$$\tau \|\pi^n\| \leq c_0 (\tau \nu \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\| + \tau \tau_0 \|\operatorname{div}_h \vec{z}^n\| + \|\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n\| + \\ + \tau \tau_0 \delta \sum_m \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\| + \frac{\tau}{h} \|\nabla \vec{u}\| \cdot \|\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n\| + \tau (\|\nabla_h \vec{u}\| + \frac{1}{h} \|\vec{u}^n\|) \cdot \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\|).$$

Возведем обе части в квадрат

$$\tau^2 \|\pi^n\|^2 \leq c_0^2 M \left[\|\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n\|^2 \left(1 + \frac{\tau^2}{h^2} \|\nabla_h \vec{u}\|^2 \right) + \tau \tau_0 \|\operatorname{div}_h \vec{z}^n\|^2 + \right. \\ \left. + \tau \tau_0 \delta \sum_m \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\|^2 + \tau \left(\nu + \left(\|\nabla_h \vec{u}\| + \frac{1}{h} \|\vec{u}^n\| \right)^2 \right) \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\|^2 \right], \quad (12)$$

где $M = 1 + \tau \nu + \tau \tau_0 + \tau \tau_0 \delta N$.

Умножим обе части (12) на α и прибавим к (11)

$$\|\vec{z}^{n+1}\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} \|\pi^{n+1}\|^2 + \left(\nu_1 - \alpha c_0^2 M \left(1 + \frac{\tau^2}{h^2} \|\nabla \vec{u}\|^2 \right) \right) \|\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n\|^2 + \\ + \tau \tau_0 (1 - \alpha c_0^2 M) \|\operatorname{div}_h \vec{z}^n\|^2 + \tau \tau_0 (\delta_1 - \delta \alpha c_0^2 M) \sum_m \|z_{m,x_m}^{n+1} - z_{m,x_m}^n\|^2 + \\ + \tau \left[2\nu_0 - \alpha c_0^2 M \left(\nu + \left(\|\nabla_h \vec{u}\| + \frac{1}{h} \|\vec{u}^n\| \right)^2 \right) \right] \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\|^2 + \tau \tau_0 \delta \sum_m \|z_{m,x_m}^{n+1}\|^2 \leq \\ \leq \|\vec{z}^n\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} (1 - \tau \tau_0 \alpha) \|\pi^n\|^2 + \tau \tau_0 \delta \sum_m \|z_{m,x_m}^n\|^2.$$

Предположим, дополнительно, что множитель α и параметры задачи такие, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \nu_1 - \alpha c_0^2 M \left(1 + \frac{\tau^2}{h^2} \|\nabla_h \vec{u}\|^2 \right) &\geq 0, \quad 1 - \alpha c_0^2 M \geq 0, \quad \delta_1 - \delta \alpha c_0^2 M \geq 0, \\ 2\nu_0 - \alpha c_0^2 M \left(\nu + \left(\|\nabla \vec{u}\| + \frac{1}{h} \|\vec{u}^n\| \right)^2 \right) &\geq \delta_2 > 0. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\|\vec{z}^{n+1}\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} \|\pi^{n+1}\|^2 + \tau \delta_2 \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\|^2 + \tau \tau_0 \delta \sum_m \|z_{m,x_m}^{n+1}\|^2 \leq \|\vec{z}^n\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} (1 - \tau \tau_0 \alpha) \|\pi^n\|^2 + \tau \tau_0 \delta \sum_m \|z_{m,x_m}^n\|^2.$$

Очевидно, что

$$\sum_m \|\vec{z}_{m,x_m}^{n+1}\|^2 \leq \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\|^2, \quad \delta_0 \|\vec{z}^{n+1}\|^2 \leq \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\|^2.$$

Тем самым мы можем записать, что

$$\begin{aligned} (1 + \tau \delta_0 \varepsilon_2) \|\vec{z}^{n+1}\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} \|\pi^{n+1}\|^2 + \tau \tau_0 \delta \left(1 + \frac{\varepsilon_3}{\tau_0 \delta} \right) \sum_m \|z_{m,x_m}^{n+1}\|^2 &\leq \\ \leq \|\vec{z}^n\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} (1 - \tau \tau_0 \alpha) \|\pi^n\|^2 + \tau \tau_0 \delta \sum_m \|z_{m,x_m}^n\|^2, &\quad (13) \end{aligned}$$

где $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ такое, что $\delta_2 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \geq 0$.

Обозначив через

$$F^n = (1 + \tau \delta_0 \varepsilon_2) \|\vec{z}^n\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} \|\pi^n\|^2 + \tau \tau_0 \delta \left(1 + \frac{\varepsilon_3}{\tau_0 \delta} \right) \sum_m \|z_{m,x_m}^n\|^2, \quad (14)$$

из (13) имеем

$$F^{n+1} \leq q F^n,$$

где

$$q = \max \left\{ \frac{1}{1 + \tau \delta_0 \varepsilon_2}, 1 - \tau \tau_0 \alpha, \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_3}{\tau_0 \delta}} \right\} < 1.$$

Т.е., показали, что соотношение (14) для погрешности итерации сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$.

Далее приводятся результаты расчетов встречных течений несжимаемой жидкости в канале с краевыми условиями, показанной на рис. 1.

Итерации производились до выполнения критерия сходимости

$$\sum_m \left\| (p^n - \tau \operatorname{div}_h \vec{u}^n)_{x_m} - \nu \Delta_h u_m^n \right\| + \left\| \operatorname{div}_h \vec{u}^n \right\| \leq 10^{-4}. \quad (15)$$

Надо отметить, что во всех случаях критерий сходимости был достигнут с указанной точностью.

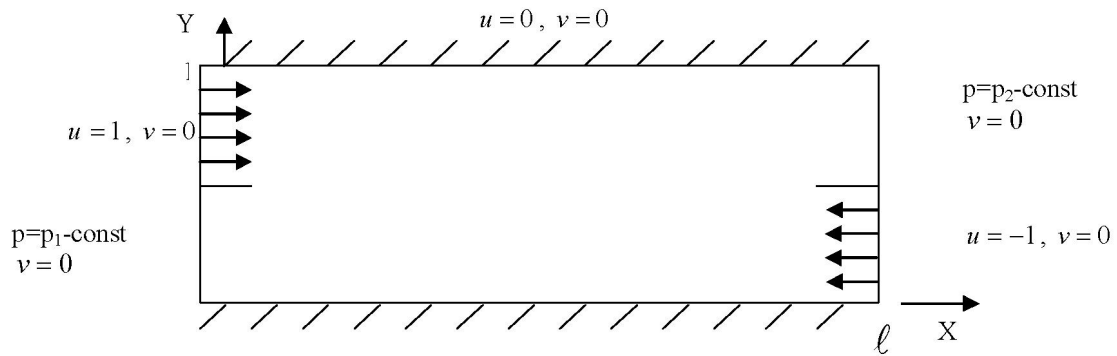


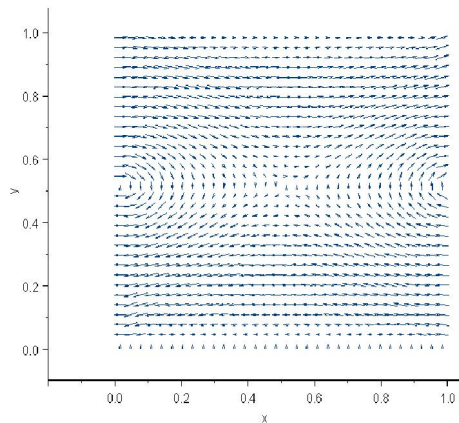
Рис. 1. Расчетная область для плоского течения

В табл. 1 приведены результаты численного эксперимента для различных значений длины области ℓ ($\ell = 1; 2; 3$) при $p_2 - p_1 = 0$, $h_1 = h_2 = 1/64$ и $\tau = \tau_0 = 0,05$, где $n_0(\varepsilon)$ – количество итерации для нахождения критерия сходимости (15).

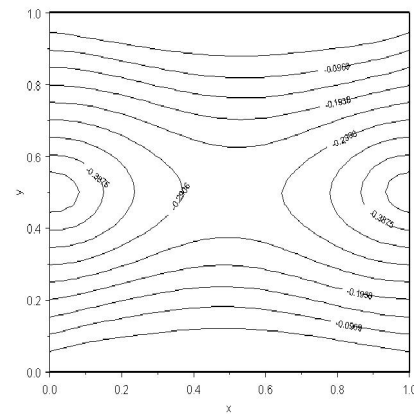
Таблица 1. Результаты расчетов при итерационных параметрах $h_1 = h_2 = 1/64$ и $\tau = \tau_0 = 0,05$

	$\ell = 1, (65 \times 65)$			$\ell = 2, (129 \times 65)$			$\ell = 3, (193 \times 65)$		
Re, число Рейнольдса	100	500	1000	100	500	1000	100	500	1000
Число итерации $n_0(\varepsilon)$	216	274	398	454	1228	2231	710	1626	2834

На рис. 2 показаны поле скорости и изолиния функции тока при $\ell = 1, (65 \times 65)$ и $Re=100$.



а – векторное поле при $Re=100$

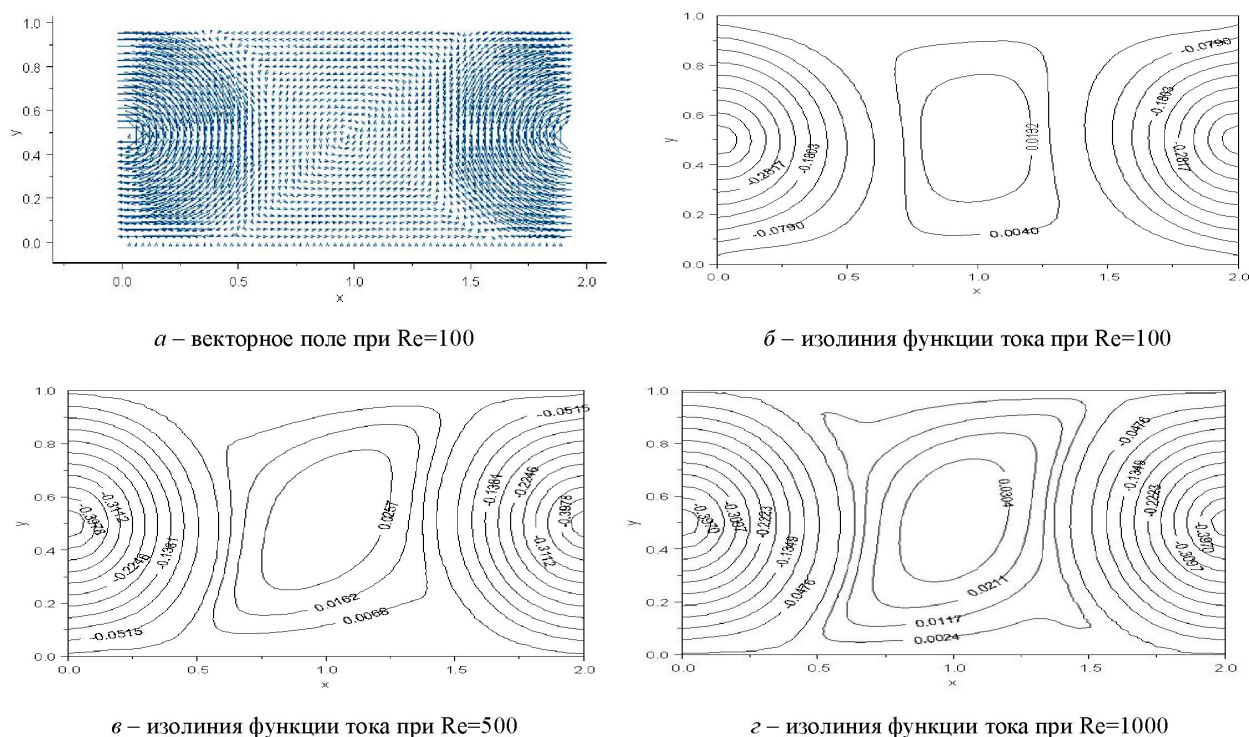
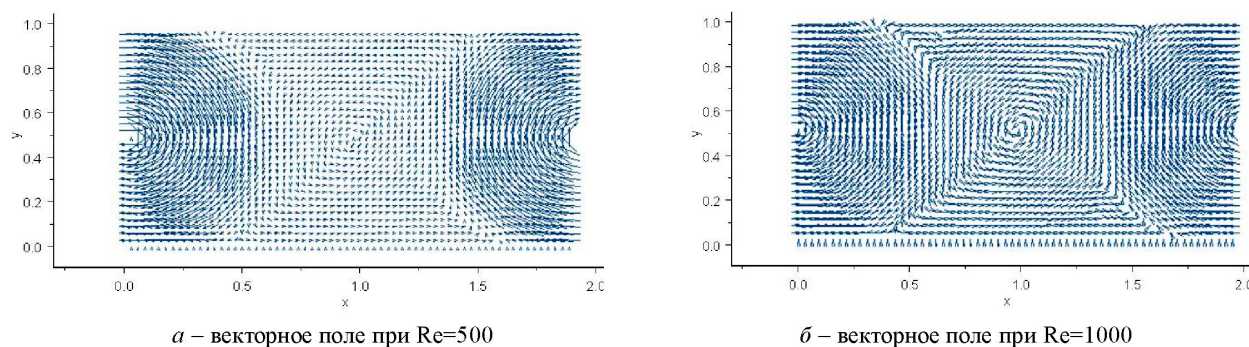


б – изолиния функции тока при $Re=100$

Рис. 2. Картинки течения при $\ell = 1, (65 \times 65)$ и $Re=100$

С увеличением значения числа Рейнольдса наблюдается увеличение интенсивности течения. Этот факт подтверждается полученными на рисунке 3 изолиниями функции тока при $Re=100; 500$ и $Re=1000$ для $\ell = 2, (129 \times 65)$.

Например, в середине рассматриваемой области для $Re=100$ (рис. 3, б) значение функции тока равно 0,0132, а для $Re=500$ и $Re=1000$ соответственно 0,0257 и 0,0304 (рис. 3, в, г). А на рис. 4 приведены векторные поля при $Re=500$ и $Re=1000$ для $\ell = 2, (129 \times 65)$.

Рис. 3. Картинки течения для различных чисел Рейнольдса при $\ell = 2$, (129×65) Рис. 4. Картинки течения при $\ell = 2$, (129×65) и $Re=500$, $Re=1000$

Еще один интересный факт эволюции вихря можно увидеть при $\ell = 3$, (193×65) картинка течения, которые представлены на рис. 5.

Из рис. 2, а, 3, а, и 5, а видно, что с увеличением длины ℓ ($\ell = 1; 2; 3$) появляются дополнительные вихри.

С целью для определения значений длины области ℓ , при которых появляется вихрь, численные расчеты проводились также для других областей, например, для $\ell = (1,25; 1,5; 1,75)$ результаты которого приведены на рис. 6. Сравнивая рис. 2, а и 6, б можно заметить, что в случае, когда $\ell = 1,5$ отличие от $\ell = 1$, в середине области появляется возмущение.

Далее, когда $\ell = 1,75$ (рис. 6 в) в середине рассматриваемой области вихрь становится более заметным по сравнению $\ell = 1,5$ (рис. 6 б).

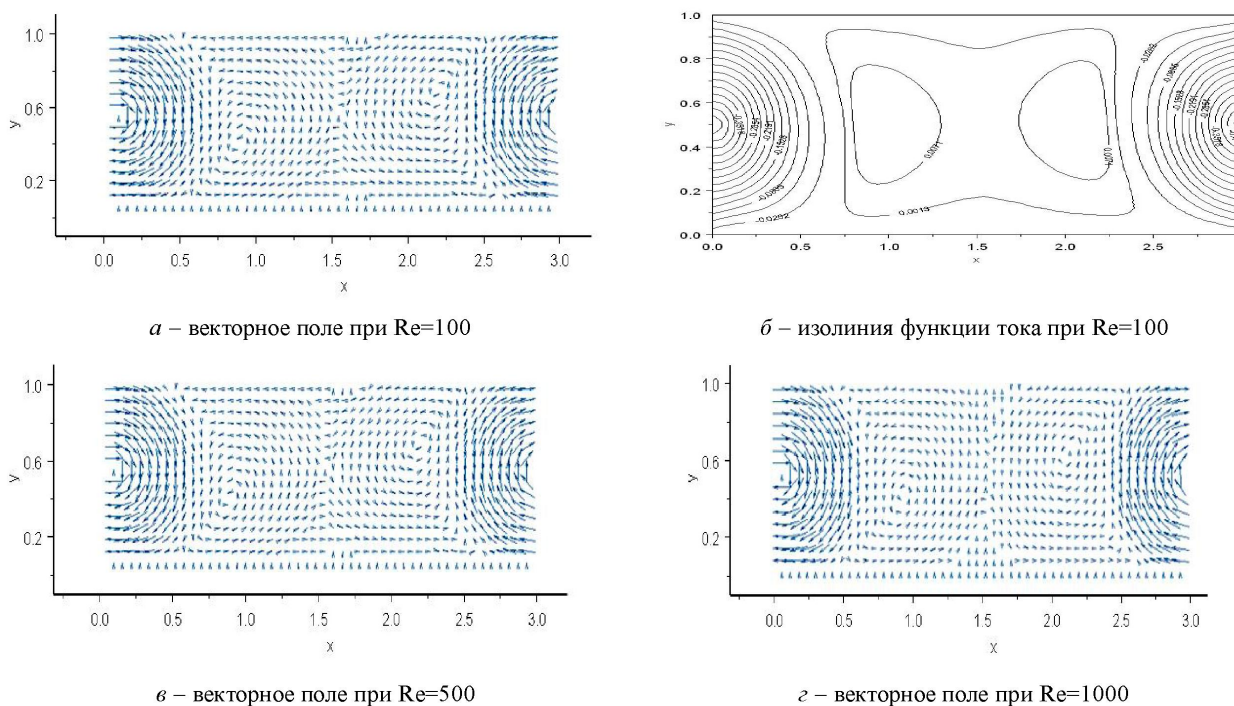


Рис. 5. Картинки течения при $\ell = 3, (193 \times 65)$ и $Re=100$

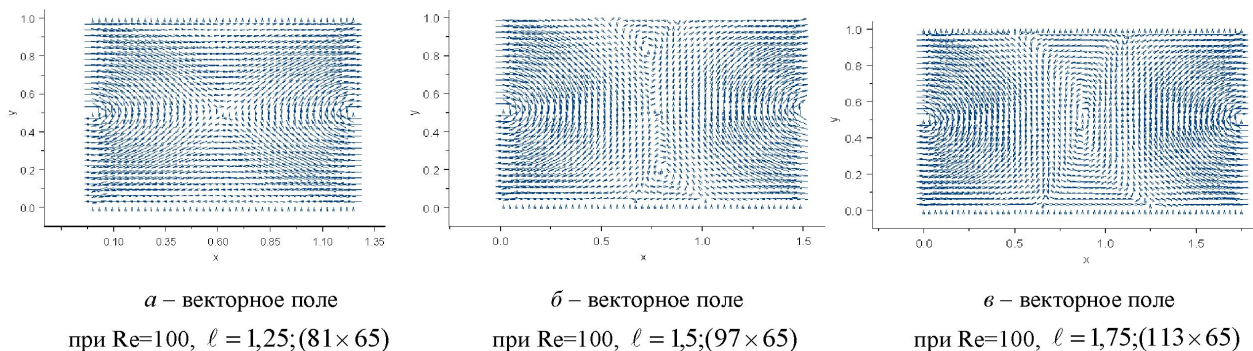


Рис. 6. Векторные поля при $Re=100$ для различных значений длины области

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.
2. Данаев Н.Т., Ергалиев Е.К. Об одном итерационном методе решения стационарных уравнений Навье-Стокса // Вычислительные технологии. Новосибирск, 2006. Т. 11, № 4. С. 37-43.

Резюме

Аталған жұмыс «жылдамдық векторы, қысым» айнымалыларындағы сызықтық емес стационар Навье-Стокс тендеулерін сандық жолмен шешуге арналған итерациялық алгоритмнің жинақтылығын зерттеуге арналған. Шенелген ұзындықты каналдағы сығылмайтын сұйықтың қарсы ағысының сандық нәтижелері келтірілген.

Summary

Work is devoted to research of convergence of iterative algorithm for the numerical decision of nonlinear stationary equations Navie-Stokes in variables «a vector of speed, pressure». It is presented results of calculations for counterflows of an incompressible liquid in channels of final length.

КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы;

ВКГУ им. С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск

Поступила 5.10.07г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Englander S.W., Kallenbach N.R., Heeger A.J., Krumhansl J.A., Litwin A.* // Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1980. № 77. С. 7222-7230.
2. *Yakushevich L.V.* // Nonlinear Physics of DNA, Wiley, Chichester, 1998. 230 с.
3. *Peyrard M.* // Nonlinearity. 2004. №17. С. 33-41.
4. *Salerno* // Phys. Rev. A., 1991. № 44. С. 5292-5302.
5. *Peng C.K., Buldyrev S.V., Goldberger A.L., Havlin S., Sciortino F., Simons M., Stanley H.E.* // Nature. 356. 1992. С. 168-171.
6. *Peng C.K., Buldyrev S.V., Havlin S., Simons M., Stanley H.E., Goldberger A.L.* // Phys. Rev. E 49. 1994. С. 1685-1697.
7. *Мырзакулов Р., Дандыбаева А.К., Жунусов К.Х.* Об однородной геометрической модели молекулы ДНК // Вестник КазНУ. Серия физическая. 2006. № 1(21). С. 31-35.
8. *Мырзакулов Р.* Биология с точки зрения физика и математика // Известия НАН РК. 2005. №4. С. 45-52.
9. *Мырзакул Т.Р., Мырзакулов Р.* О нелинейной динамике нанотрубки и молекулы ДНК // Мат. 5-ой межд. конф. «Хаос и структуры в нелинейных системах. Теория и эксперимент», ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, 15-17 июня, 2006 г., Астана. С. 179-182.
10. *Райымкулов М.А., Каныгина О.Н., Мырзакулов Р.* О нелинейных возбуждениях и нанофизике ДНК // Вестник ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, 2006, №6. С. 62-70.
11. *Raiymkulov M.A.* Nonlinear Dynamics of DNA with Low-Level Fractionality // Abstracts of the Seventh International Conference «Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics» Kiev, Ukraine, June 24-30, 2007.
12. *Райымкулов М.А., Каныгина О.Н., Мырзакулов Р.* Нелинейные возбуждения и нанофизика молекулы ДНК в неоднородном поле // Вестник ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, 2007. №2. С. 60-69.
13. *Кожамкулов Т.А., Райымкулов М.А., Белисарова Ф.Б., Мырзакулов Р.* Фрактальное уравнение динамики молекулы ДНК // Вестник КазНУ. Серия физическая. 2007 (в печати).
14. *Кожамкулов Т.А., Райымкулов М.А., Белисарова Ф.Б., Мырзакулов Р.* Нанодинамика движения солитона в гетероструктурной молекуле ДНК // Вестник КазНУ. Серия физическая. 2007 (в печати).
15. *Райымкулов М.А.* Уравнение динамики молекулы ДНК с учетом фрактальности // Материалы научно-методической конференции «Теория и методика обучения физико-математическим дисциплинам», КазНПУ им. Абая, Алматы, 26-27 апрель 2007 г. С. 123-126.
16. *Райымкулов М.А.* Фазовые пространства кинка в молекуле ДНК с учетом фрактальности // Труды международной научной конференции молодых ученых «Наука и образование-2007», ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, Астана, 20-21 апреля 2007 г. С. 1132-1136.
17. *Райымкулов М.А., Мырзакулов Р.* Математическое моделирование нелинейных процессов в молекуле ДНК с учетом фрактальных структур // Мат. респуб. науч. конф. «Моделирование механических систем и процессов», КарГУ им. Е. А. Букетова, 5-6 октября 2007 г. С. 195-197.

Резюме

Хаусдорфтың бөлшек көрсеткіштік және Риман-Лиувилльдің бөлшек туындылы фракталды модельдері талқыланады. Инглендер мен Якушевич модельдерінің шешімдері келтірілген.

Summary

We consider the fractional generalizations of equation of Englander and Yakushevich models. We use Hausdorff fractional dimensional and classical Riemann-Liouville derivative.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы;

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, г. Астана

Поступила 01.11.07г.