УДК 517.9+532.5

Ш. К. КОДАНОВА, У. А. САДЫКОВ

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрена задача типа Стефана с конвективным переносом тепла, которая встречается в задачах теории неизотермической фильтрации. При этом скорость жидкости считается известной и подчиняется закону Дарси.

В работе исследована математическая модель неизотермической фильтрации жидкости в пористой среде с учетом массообменных процессов. На основе результатов работы [1] проведено численное моделирование рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи. Основные законы сохранения механики сплошной среды можно записать в виде системы дивергентных уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + div(F \cdot v - G) = X \ . \qquad (1)$$

Оказывается, предельные значения указанных функций на поверхности Γ_γ (на поверхности сильного взрыва) не произвольные, а удовлетворяет системе уравнений на «сильном» разрыве

$$[F \cdot (v \cdot \upsilon - V_\upsilon) - G \cdot \upsilon] = 0 \,, \qquad (2)$$

где V_υ - скорость перемещения сечения $\Gamma(t)$ - гиперповерхностью Γ_γ плоскостью (t = const) в направлении нормали υ к этому сечению. Уравнения (2) следуют из уравнений (1) и предположения о структуре движения. В самом деле, каждое уравнение (1) эквивалентно интегральному тождеству:

$$\iint\left((G - F \cdot v) \cdot \nabla\varphi - F \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - X \cdot \varphi\right) dxdt = 0 \quad (3)$$

с произвольной гладкой финитной в Ω_γ функцией φ. Пусть Q – произвольная область содержащая Γ_γ, и

$$Q = Q^+ \cup Q^- \cup \sigma \,, \qquad (4)$$

где σ - часть поверхности Г, а в Q^+ и Q^- функции F, G, v непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют уравнению (1) в обычном смысле.

Воспользуемся вышеуказанными обозначениями и из (1) получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla U = div(\chi \cdot \nabla\theta) + f(x,t) . \qquad (5)$$

Для простоты ограничимся случаем одной пространственной переменной. Итак, пусть область $\Omega_\gamma^- = \left((x,t)\big|_+ \ -1 < x < R^-(t), 0 < t < T\right)$ занята твердой фазой, а область $\Omega_\gamma^+ = \left((x,t)\big|_+ R^+(t) < x < 1, 0 < t < T\right)$ - жидкой фазой, а область $\Omega_T^+ = \left((x,t)\big|_+ R^-(t) < x < R^+, 0 < t < T\right)$ - переходной фазой. Функции $R^-(t), R^+(t)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми. По определению движения с сильным разрывом всюду вне линий $x = R^-(t)$ и $x = R^+(t)$ движение непрерывное, т.е. в областях Ω_T^- и Ω_T^+ уравнение (1.5) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\theta=div(\chi\cdot\nabla)+f(x,t), \quad (6)$$

а в области Ω_T^* - уравнению в общем случае (т.е. при n>1)

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla U=f(x,t) \quad (7)$$

и функции θ и U в соответствующих замкнутых областях обладают непрерывными производными, входящими в уравнение (6) и (7). Если учесть, что скорость перемещения поверхности $x = R(t)$ есть производная по времени функций $R(t)$, и что предел удельной внутренней энергии со стороны жидкой фазы на линии $x=R^+(t)$ равен нулю, а со стороны твердой фазы на линии $x=R^-(t)$ - величине $-L$, то получим из (2) следующие соотношения:

$$\left(U\left(R^-(t)+0,t\right)+L\right)\left(\frac{dR^-}{dt}-b^*\varphi\left(R^-(t),t\right)\right)=$$

$$=\chi_S\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\left(R^-(t)-0,t\right), \quad (8)$$

$$\left(U\left(R^+(t)-0,t\right)+L\right)\left(\frac{dR^+}{dt}-b^*\varphi\left(R^+(t),t\right)\right)=$$

$$=\chi_L\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\left(R^+(t)+0,t\right), \quad (9)$$

где $F=U, G=\chi\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=b^*\cdot\varphi(x,t)$ - расход смеси, $b^*={(a_ik_i)}\big/{(k_1+k_2)}$, $i=1,2$

Исследуем возникновение переходной фазы, когда

$R^-(0)=R^+(0)=x_0$ и $R^-(0)<R^+(0)$ при $t>0$. (10)

Оказывается, в этом случае при определенных условиях на данные задачи краевое условие (8) или (9) распадается на два независимых условия, а сама исходная задача - на последовательное решение трех автономных задач. По предположению температура θ неположительна в области Ω_T и равна нулю на ее правой границе $x=R^+(t)$. Следовательно,

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\left(R^-(t)-0,t\right)\ge 0. \quad (11)$$

Аналогично

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\left(R^+(t)+0,t\right)\ge 0. \quad (12)$$

В переходной фазе удельная внутренняя энергия принимает значения из интервала (L; 0), т.е.

$$\left(U\left(R^-(t)+0,t\right)+L\right)\ge 0,$$

$$\left(U\left(R^+(t)-0,t\right)+L\right)\le 0. \quad (13)$$

Сравнивая (9) с (12) и (13), видим, что

$$\frac{dR^+}{dt}(t)\le b^*\cdot\varphi\left(R^+(t),t\right). \quad (14)$$

Далее, сравнивая (8) с (11) и (13), видим, что

$$\frac{dR^-}{dt}(t)\ge b^*\cdot\varphi\left(R^-(t),t\right). \quad (15)$$

Тогда из (10) следует, что по крайней мере на малом интервале времени

$$b^*\cdot\varphi\left(R^-(t),t\right)\le\frac{dR^-}{dt}<\frac{dR^+}{dt}\le b^*\cdot\varphi\left(R^+(t),t\right). \quad (16)$$

Предположим обратное, пусть (совпадает с физической постановкой)

$$\frac{dR^-}{dt}<b^*\cdot\varphi\left(R^-(t),t\right)\le b^*\cdot\varphi\left(R^+(t),t\right)<\frac{dR^+}{dt}. \quad (17)$$

В силу (8), (11) и (13) последнее неравенство возможно, если только

$$\left(U\left(R^-(t)+0,t\right)+L\right)=0,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\left(R^-(t)-0,t\right)=0. \quad (18)$$

Кроме того, из (9), (12) и (13) неравенство (17) справедливо только при

$$U\left(R^+(t)-0,t\right)=0,\ \frac{\partial\theta}{\partial x}\left(R^+(t)+0,t\right)=0. \quad (19)$$

В вышеуказанной постановке получены теоремы существования и единственности, а также изучены качественные свойства решений. С помощью автомодельных решений исследованы положения свободной границы и ее поведение при неограниченном возрастании времени.

2. Асимптотическое поведение по времени решения однородной задачи типа Стефана. Пусть в начальный момент времени жидкая фаза (т.е. вода в нефтяном коллекторе) занимает область $\Omega^{+}(0)=\{x|0<x<x_0\}$, а твердая фаза (парафинированная нефть) – область $\Omega^{-}(0)=\{x|x_0<x<\infty\}$. Тогда в области $\Omega_T^{+}=\left((x,t)\ \middle|\ 0<x<R(t)\ ,0<t<T\right)$ температура $\theta(x,t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\theta)+v\frac{\partial}{\partial x}\Phi(\theta)=\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2},\ \ (x,t)\in\Omega_T^{+} \quad (20)$$

и двум условиям на свободной границе:

$$\theta|_{x=R(t)}=0,\ \ \frac{dR}{dt}=-\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x=R(t)},\ \ t\in(0,T), \quad (21)$$

$$\theta|_{x=0}=\theta^0(t),\ \text{либо}\ \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}+\text{в}(t)\cdot\theta\right)\Big|_{x=0}=\theta'(t) \quad (22)$$

в начальный момент времени условно

$$R(0)=x_0,\ \ \theta(x.0)=\theta_0(x),\ \ x\in\Omega^{+}(0). \quad (23)$$

Теорема 1. Пусть $\Phi\in C^2[0,\beta]$, $\Phi'(s)>0$ при $s\in[0,\beta]$. Тогда задача (20) – (23) с данными $\theta_0(t)=const>0,\ \ x_0=0,\ \ U_0(x)=-1$ при $x\in(0,\infty)$ имеет единственное решение вида

$R_0(t)=D_*(\beta)(t+1)^{1/2}$,

$\theta_*(x,t)=u\left(x(t+1)^{-1/2},\ \ \beta\right)$, с функцией $D_*(\beta)$, непрерывно зависящей от параметра β и такой, что $\lim D_*(\beta)=0$ при $\beta>0$.

Доказательство. Функция $U(\xi,\beta)$, $\xi=\dfrac{x}{\sqrt{t+1}}$ и параметр $D_*=D_*(\beta)$ подлежат определению из условий

$$u''+\left(\frac{\xi}{2}-V\cdot\sqrt{t+1}\right)\cdot a(u)\cdot u'=0,$$

$$a(u)=\Phi'(\theta),\ \ \xi\in(0,D_*), \quad (24)$$

$$u(0,\beta)=\beta,\ \ u(D_*,\beta)=0\ , \quad (25)$$

$$\frac{du}{d\xi}(D_*,\beta)=-\frac{1}{2}\cdot D_*. \quad (26)$$

Покажем, что для каждого $D>0$ найдется хотя бы одна функция $V(\xi)$, удовлетворяющая уравнению (24) и краевым условиям (25). Далее, вычисляя производную $dV/d\xi$ в точке $\xi=D$ и подставляя ее в левую часть (26) получим уравнение, решение которого D_* определяет решение задачи (24)–(26). Для определения функции $V(\xi)$ рассмотрим линейную краевую задачу

$$\frac{d^2\tilde V}{d\xi^2}+\left[\frac{\xi}{2}-v\sqrt{t+1}\right]a(f(\varsigma))\frac{d\tilde V}{d\xi}=0,$$

$$\tilde V(0)=\beta,\ \ \tilde V(D)=0\ ,$$

где аргументом в коэффициенте a является произвольная неотрицательная функция $f(\xi)$, непрерывная на интервале $(0,D)$ и ограниченная там постоянной β. Решение последней дается формулой

$$\tilde V(\xi)=\beta\cdot\frac{\int\limits_{\xi}^{D}\exp\left\{-\int\limits_0^{\tau}\left[\frac{s}{2}-v\sqrt{t+1}\right]\cdot a(f(s))ds\right\}d\tau}{\int\limits_{0}^{D}\exp\left\{-\int\limits_0^{\tau}\left[\frac{s}{2}-v\sqrt{t+1}\right]\cdot a(f(s))ds\right\}d\tau}. \quad (27)$$

Правая часть последнего выражения есть непрерывный оператор $\Phi(f)$, определенный на выпуклом замкнутом множестве

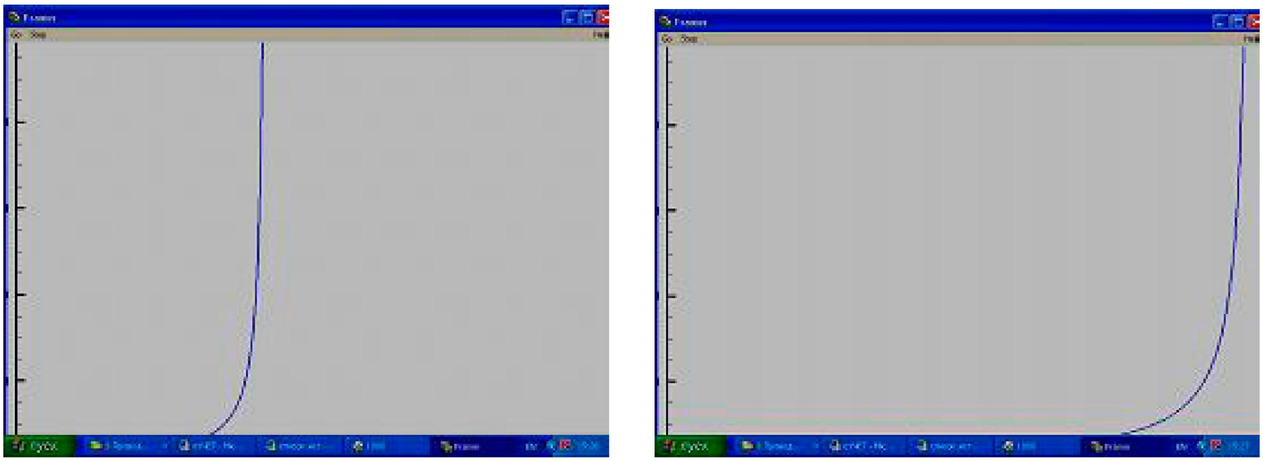
$$\mathrm{M}=\left\{\xi\in(0,D)\middle|\|f(\xi)\|_{C[0,D]}\le\beta\right\}\ \text{и}\ \ \Phi:\mathrm{M}\to\mathrm{M}.$$

По теореме Шаудера найдется хотя бы одна неподвижная точка V оператора Φ: $V=\Phi(V)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия Теоремы 1 и условия (29) с $\beta>0$. Тогда для решения $R(t)$ задачи (20) – (23) справедливо равенство $\lim\limits_{t\to\infty}(t+1)^{-1/2}R(t)=D_*(\beta)$, где $D_*(\beta)$ - решение задачи (24) – (26).

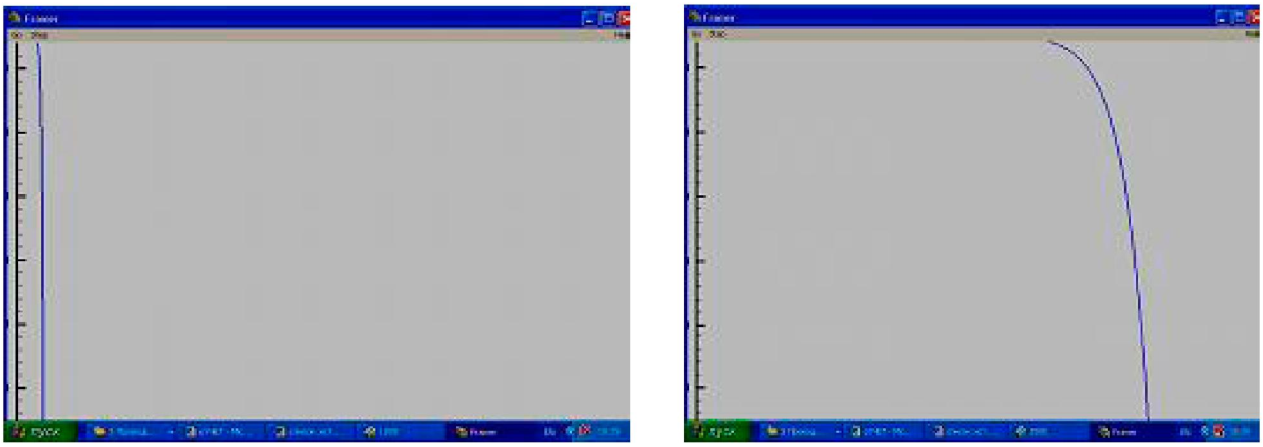
Доказательство теоремы следует из результатов работ [1, 2].

3. Численные результаты. В общем случае рассматривается система из двух уравнений: относительно температуры и давления, а скорость, как было отмечено выше, определяется из закона Дарси. Система уравнений решается методом установления по явной разностной схеме. Сетка по пространственной переменной ξ равномерная, а временной шаг τ - выбирается из условия устойчивости конечной – разностной схемы.



а б

Рис. 1. Изменение границы относительно давления: *а* – в начале расчета; *б* – в конце расчета



а б

Рис. 2. Изменение границы относительно температуры по времени: *а* – в начале расчета; *б* – в конце расчета

Результаты расчетов приведены на рис. 1–2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абиров А.К., Мухамбетжанов С.Т.* Моделирование задач фазовых переходов при неизотермической фильтрации и качественные свойства решения // Вестник КазГУ. Сер. мат., мех., инф. 1996. № 5. С. 3-11.

2. *Мейрманов А.М.* Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1985. 234 с.

Резюме

Екі фазалы сұйықтың қуыс ортадағы көпбайланысты аймақ бойынша қозғалысын сипаттайтын есептің жуық шешімдері негізделуі қарастырылған. Негізгі мәселе айырымдық схемасын құруға негізделген.

Summary

In the present work substantiation for the decision of a biphase filtration of a liquid in the porous environment in multicoherent areas is considered. The basic attention is given to construction circuits and estimations of the approached decisions to the decision of an initial problem.

Казахский национальный университет им. аль- Фараби, г. Алматы

Поступила 12.11.07г.