УДК 530.1

Т. А. КОЖАМКУЛОВ, М. А. РАЙЫМКУЛОВ, Ф. Б. БЕЛИССАРОВА, Р. МЫРЗАКУЛОВ

КИНКОПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОЙ МОДЕЛИ МОЛЕКУЛЫ ДНК

Рассмотрены нелинейные фрактальные модели Инглендера и Якушевич. Рассмотрены решения для показателя размерности Хаудсорфа и дробной производной Римана-Луивилля.

1. Введение. Развитие нанотехнологии подталкивает к исследованию таких сложных структур, как молекула ДНК. Использование молекулы ДНК как материал в нанотехнологиях прелставляет собой большой интерес. Исследование физических процессов, протекающих в молекуле началось сравнительно недавно такими работами как [1-9], в которых были предложены различные модели молекулы ДНК. В работах [10-17] обсуждалось применение фрактального анализа к молекуле ДНК на основе метода интегродифференцирования.

Молекула ДНК представляет собой структуру со сложной геометрией, образуемой сложным порядком оснований. Исследование фрактальности генотипа молекулы ДНК обсуждалось в работах [5-6] на основе MF-DFA анализа. В данной работе будут рассмотрены уравнения динамики молекулы ДНК с учетом фрактальной геометрией исследуемой молекулы, а также некоторые решения этих уравнений.

В разделах 2, 3 нами обсуждаются модели с учетом фрактальности, так как существует связь $dl_D = c_1(D,x)dx$, то возможен переход от координат с дробным показателем Хаусдорфа к координатам с целым показателем. В разделах 4, 5 рассмотрены модели с учетом дробной производной Римана-Луивилля. В разделах 6, 7 представлены решения для лианизированных моделей Инглендера и Якушевич. В разделе 8 представлено решение с помощью метода теории возмущения, а в разделе 9 представлено решение уравнения динамики с использованием гельдеровской производной.

2. Модифицированная модель Инглендера для фрактальной молекулы ДНК.

В модели Инглендера молекула ДНК рассматривается как система возбуждаемых маятников, однако система является одномерной, т.е. D=1 [1]. Рассмотрим фрактальную молекулу ДНК, полагая, что размерность Хаудсорфа D дробна и постоянна по всему рассматриваемому пространству. Гамильтониан для линейной системы можно привести к виду:

$$H = \int dx \left\{ \frac{u_t}{2} + \frac{u_x}{2} + 1 - \cos u \right\} + const, \qquad (1)$$

где u – угловое положение маятника. Для фрактальной системы гамильтониан (1) перепишется в виде:

$$H = \int dl_D \left\{ \frac{u_t}{2} + \frac{u_x}{2} + 1 - \frac{1}{2}\cos u \right\} + const, \qquad (2)$$

где D-мерная длина связана с одномерной длиной соотношением:

$$dl_D = c_1(D,x)dx, \quad c_1(D,x) = \frac{x^{D-1}}{\Gamma(D)}. \qquad (3)$$

Исходя из уравнения Эйлера-Лагранжа для рассматриваемой системы, получим:

$$\frac{\delta H}{\delta x} = c_1(D,x)u_{tt} - \frac{d}{dx}\left(c_1(D,x)u_x\right) + c_1(D,x)\sin u = 0, \qquad (4а)$$

$$\frac{x^{D-1}}{\Gamma(D)}u_{tt} - \frac{(D-1)x^{D-2}}{\Gamma(D)}u_x - \frac{x^{D-1}}{\Gamma(D)}u_{xx} + \frac{x^{D-1}}{\Gamma(D)}\sin u = 0, \qquad (4б)$$

$$u_{tt} - u_{xx} - \frac{(D-1)}{x}u_x + \sin u = 0. \qquad (4в)$$

Полученное уравнение (4в) есть модифицированное уравнение синус-Гордона, описывающее возбуждение мономеров во фрактальной молекуле ДНК. Для случая, когда D=1, уравнение (4в) переходит в синус-Гордона уравнение, описывающее одномерный случай модели Инглендера:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \qquad (5)$$

решением которого является кинк.

3. Модифицированная модель Якушевич для фрактальной молекулы ДНК. В модели Якушевич рассматривается двухцепочечная молекула ДНК, в которой маятники цепочек взаимодействуют друг с другом [2]. Энергия взаимодействия двух маятников, принадлежащие разным цепочкам, имеет вид:

$$V \sim \Delta l^2, \tag{6}$$

где Δl - расстояние между маятниками. В таком случае гамильтониан для линейной модели Якушевич имеет вид:

$$H = \int dx \left\{ \frac{u_{1t}}{2} + \frac{u_{2t}}{2} + \frac{u_{1x}}{2} + \frac{u_{2x}}{2} - \frac{1}{2}\left[2\cos u_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\cos u_2 - \cos(u_1 + u_2)\right]\right\} + const. \tag{7}$$

Для фрактальной системы гамильтониан (7) перепишется в виде:

$$H = \int dl_D \left\{ \frac{u_{1t}}{2} + \frac{u_{2t}}{2} + \frac{u_{1x}}{2} + \frac{u_{2x}}{2} - \frac{1}{2}\left[2\cos u_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\cos u_2 - \cos(u_1 + u_2)\right]\right\} + const, \tag{8}$$

из которого получим систему уравнений:

$$u_{1tt} - u_{1xx} - \frac{(D-1)}{x} u_{1x} + \left[2\sin u_1 - \sin(u_1 + u_2)\right] = 0, \tag{9а}$$

$$u_{2tt} - u_{2xx} - \frac{(D-1)}{x} u_{2x} + \left[2\sin u_2 - \sin(u_1 + u_2)\right] = 0. \tag{9б}$$

Полученные уравнения (9а) и (9б) есть модифицированное уравнения динамики модели Якушевич, описывающее возбуждение мономеров в фрактальной молекуле ДНК. Для случая, когда D=1, уравнения (9а) и (9б) переходят в систему уравнений, описывающих одномерный случай модели Якушевич:

$$u_{1tt} - u_{1xx} + \left[2\sin u_1 - \sin(u_1 + u_2)\right] = 0, \tag{9в}$$

$$u_{2tt} - u_{2xx} + \left[2\sin u_2 - \sin(u_1 + u_2)\right] = 0, \tag{9г}$$

решение которой приведено в работе [2].

4. Модифицированная модель Инглендера в терминах дробной производной по времени. В работах [13, 14] рассмотрено приложение аналога уравнения Лагранжа-Эйлера для фрактальной среды молекулы ДНК. Для удобства фрактальную размерность обозначим через величину α. В таком случае, скорость частицы описывается через понятия дробной производной.

$$\dot{u} = D_t^\alpha u, \tag{10}$$

где D_t^α - производная Римана-Луивилля, которая имеет вид:

$$D_t^\alpha u = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{u(\xi)}{(t-\xi)^{1-\alpha}} d\xi. \tag{11}$$

Уравнение Лагранжа-Эйлера будет иметь вид:

$$\frac{dL}{du} - D_t^\alpha \frac{dL}{d\dot{u}} = 0. \tag{12}$$

В модели Инглендера лагранжиан системы имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}\left(u_x^2 - u_t^2\right) - (1 - \cos u), \tag{13}$$

при подстановки которого в уравнение (12), считая $\alpha = 0$, выводится уравнение вида (5), описывающее динамику молекулы ДНК без учета фрактальности.

Рассмотрим некоторые случаи, считая $0 < \alpha < 1$. В данном случае лагранжиан будет иметь вид, в котором учитывается фрактальность структуры:

$$L = \frac{1}{2}\left(u_x^2 - \left(D_t^\alpha u\right)^2\right) - (1 - \cos u). \tag{14}$$

Подставив уравнение (14) в уравнение (12) получим:

$$\frac{dL}{du} - D_t^\alpha \frac{dL}{d\left(G_t^\alpha u\right)} = 0, \tag{15а}$$

$$\frac{dL}{du} = \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial u_x} = \sin u - \frac{1}{2} 2 \frac{\partial}{\partial x} u_x = \sin u - u_{xx}, \tag{15б}$$

$$D_t^\alpha \frac{dL}{d\left(D_t^\alpha u\right)} = D_t^\alpha \left[-\frac{1}{2} 2 D_t^\alpha u\right] =$$

$$= -D_t^\alpha D_t^\alpha u = -D_t^{2\alpha} u, \tag{15в}$$

получим:

$$D_t^{2\alpha} u - u_{xx} + \sin u = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16) есть модифицированное уравнение (5), описывающее динамику молекулы

ДНК с учетом фрактальности по времени в модели Инглендера.

5. Модифицированная модель Якушевич в терминах дробной производной по времени. В модели Якушевич лагранжиан системы имеет вид:

$$L = -\frac{u_{1t}}{2} - \frac{u_{2t}}{2} + \frac{u_{1x}}{2} + \frac{u_{2x}}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\left[2\cos u_1 + 2\cos u_2 - \cos(u_1 + u_2)\right], \quad (17)$$

при подстановки которого в уравнение (12), считая $\alpha = 0$, выводятся уравнения вида (9а) и (9б), описывающее динамику молекулы ДНК без учета фрактальности.

Рассмотрим некоторые случаи, считая $0 < \alpha < 1$. В данном случае лагранжиан будет иметь вид, в котором учитывается фрактальность структуры:

$$L = -\frac{D_t^{\alpha} u_1}{2} - \frac{D_t^{\alpha} u_2}{2} + \frac{u_{1x}}{2} + \frac{u_{2x}}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\left[2\cos u_1 + 2\cos u_2 - \cos(u_1 + u_2)\right], \quad (18)$$

Подставив уравнение (18) в уравнение (12) получим систему уравнений:

$$D_t^{2\alpha} u_1 - u_{1xx} + \left[2\sin u_1 - \sin(u_1 + u_2)\right] = 0, \quad (19а)$$

$$D_t^{2\alpha} u_2 - u_{2xx} + \left[2\sin u_2 - \sin(u_1 + u_2)\right] = 0, \quad (19б)$$

Уравнения (19а) и (19б) есть модифицированная система уравнений (12а) и (12б), описывающее динамику молекулы ДНК с учетом фрактальности по времени в модели Якушевич.

6. Решение линеаризованного уравнения для фрактальной молекулы ДНК. Уравнение динамики молекулы ДНК с учетом фрактальной структуры принимает вид:

$$u_{tt} - u_{xx} - \frac{D-1}{x} u_x + \sin u = 0 \quad , (20)$$

где D – показатель фрактальности структуры. Линеаризуем уравнение (20) посредством разложения в ряд с точностью до членов первого порядка:

$$u_{tt} - u_{xx} - \frac{D-1}{x} u_x + u = 0 . \quad (21)$$

Решим уравнение (21) методом Фурье. Полагая $u = \Psi(x)\Phi(t)$, перепишем уравнение (21):

$$\Phi_{tt}\Psi - \Psi_{xx}\Phi - \frac{D-1}{x}\Psi_x\Phi + \Psi\Phi = 0, \quad (22а)$$

или

$$\Psi(\Phi_{tt} + \Phi) = \Phi\left(\Psi_{xx} + \frac{D-1}{x}\Psi_x\right). \quad (22б)$$

Принимая независимость введенных функций, получим:

$$\frac{\Phi_{tt} + \Phi}{\Phi} = \frac{\Psi_{xx} + \frac{D-1}{x}\Psi_x}{\Psi} = -\lambda^2, \quad (23)$$

откуда получаем уравнения:

$$\Phi_{tt} + \Phi + \lambda^2\Phi = 0, \quad (24а)$$

$$\Psi_{xx} + \frac{D-1}{x}\Psi_x + \lambda^2\Psi = 0 . \quad (24б)$$

Решение уравнения (24а) имеет вид:

$$\Phi = \Phi_0 e^{\pm i\sqrt{\lambda^2+1}t} . \quad (25)$$

Уравнение (24б) приведем к виду:

$$x\Psi_{xx} + (D-1)\Psi_x + \lambda^2 x\Psi = 0, \quad (26)$$

решение которого представляется через функции Бесселя дробного порядка:

$$\Psi = C_1 x^a J_\nu(\beta x) + C_2 x^a Y_\nu(\beta x) . \quad (27)$$

В уравнении (27) сделаны следующие замены:

$$D - 1 = 1 - 2a, \quad (28а)$$

$$a = 1 - \frac{D}{2} . \quad (28б)$$

Поскольку $0 < D < 1$, то $\frac{1}{2} < a < 1$. Так же сделана следующая замена:

$$\beta^2 + \frac{a^2 - \nu^2}{x^2} = \lambda^2, \quad (29а)$$

от куда следует,

$$\beta^2 = \lambda^2, \quad (29б)$$

$$\nu = \pm\alpha = \pm\left(1 - \frac{D}{2}\right). \quad (29в)$$

7. Частное решение для фрактальной молекулы ДНК в модели Якушевич. Уравнение динамики двухцепочечной модели молекулы ДНК с учетом фрактальной структуры принимает вид:

$$u_{1tt}-u_{1xx}-\frac{(D-1)}{x}u_{1x}+\left[2\sin u_1-\sin(u_1+u_2)\right]=0, \quad (30а)$$

$$u_{2tt}-u_{2xx}-\frac{(D-1)}{x}u_{2x}+\left[2\sin u_2-\sin(u_1+u_2)\right]=0. \quad (30б)$$

Рассмотрим случай, когда возбуждение в одной из цепочек мало, тогда система (30) перепишется в виде:

$$u_{1tt}-u_{1xx}-\frac{(D-1)}{x}u_{1x}+\left[2u_1-u_1\cos u_2-\sin u_2\right]=0, \quad (31а)$$

$$u_{2tt}-u_{2xx}-\frac{(D-1)}{x}u_{2x}+$$

$$+\left[2\sin u_2-u_1\cos u_2-\sin u_2\right]=0, \quad (31б)$$

далее, преобразуем систему (31):

$$u_{1tt}-u_{1xx}-\frac{(D-1)}{x}u_{1x}+\left[2u_1-u_1\cos u_2-\sin u_2\right]=0, \quad (32а)$$

$$-u_{2tt}+u_{2xx}+\frac{(D-1)}{x}u_{2x}-\left[-u_1\cos u_2+\sin u_2\right]=0. \quad (32б)$$

Сложив уравнения (32а) и (32б), получим:

$$(u_1-u_2)_{tt}-(u_1-u_2)_{xx}-\frac{(D-1)}{x}(u_1-u_2)_x+$$

$$+2\left[u_1-\sin u_2\right]=0. \quad (33)$$

Разложим $\sin u_2$ в ряд Тейлора, тогда уравнение (33) примет вид:

$$(u_1-u_2)_{tt}-(u_1-u_2)_{xx}-\frac{(D-1)}{x}(u_1-u_2)_x+$$

$$+2\left[u_1-u_2+\frac{u_2^3}{3!}-\ldots\right]=0. \quad (34)$$

Введем функцию $\varphi=u_1-u_2$, тогда уравнение (34) перепишется в виде:

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}-\frac{(D-1)}{x}\varphi_x+2\left[\varphi+\frac{u_2^3}{3!}-\ldots\right]=0. \quad (35)$$

Решение уравнения (35) позволяет найти разность углов между основаниями разных цепей молекулы. Преобразуем уравнение (35):

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}-\frac{(D-1)}{x}\varphi_x+2\varphi=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{u_2^{2n-1}}{(2n-1)!}. \quad (36)$$

Для начала решим уравнение вида:

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}-\frac{(D-1)}{x}\varphi_x+2\varphi=0. \quad (37)$$

Решим уравнение (37) методом Фурье. Полагая $\varphi=\Psi(x)\Phi(t)$, перепишем уравнение (21):

$$\Phi_{tt}\Psi-\Psi_{xx}\Phi-\frac{D-1}{x}\Psi_x\Phi+2\Psi\Phi=0, \quad (38а)$$

или

$$\Psi(\Phi_{tt}+2\Phi)=\Phi\left(\Psi_{xx}+\frac{D-1}{x}\Psi_x\right). \quad (38б)$$

Принимая независимость введенных функций, получим:

$$\frac{\Phi_{tt}+2\Phi}{\Phi}=\frac{\Psi_{xx}+\frac{D-1}{x}\Psi_x}{\Psi}=-\lambda^2, \quad (39)$$

откуда получаем уравнения:

$$\Phi_{tt}+2\Phi+\lambda^2\Phi=0, \quad (40а)$$

$$\Psi_{xx}+\frac{D-1}{x}\Psi_x+\lambda^2\Psi=0. \quad (40б)$$

Решение уравнения (40а) имеет вид:

$$\Phi=\Phi_0 e^{\pm i\sqrt{\lambda^2+2}t}, \quad (41)$$

а решением уравнения (40б) является соотношение:

$$\Psi=C_1x^aJ_\nu(\beta x)+C_2x^aY_\nu(\beta x), \quad (42)$$

где $C_1=C_1(u_2,x)$, $C_2=C_2(u_2,x)$ и $\Phi_0=\Phi_0(u_2,t)$.

8. Решение методом теории возмущения для модели Инглендера в терминах дробной производной по времени для $\varepsilon t \ll 1$. Рассмотрим диффренциальное уравнение, описывающее динамику молекулы ДНК с учетом фрактальности:

$$D_t^{2\alpha}u - u_{xx} = \sin u\,. \qquad (43)$$

Полагая $2\alpha = 2 - \varepsilon$, где $\varepsilon t << 1$, разложим дробную производную по степеням ε:

$$D_t^{2-\varepsilon} = u_{tt} + \varepsilon D_1^2 u + \ldots, \qquad (44)$$

где

$$D_1^2 u = u_{tt}(0)\ln(t) + \gamma u_{tt} + \int_0^t u_{ttt}(\tau)\ln(t-\tau)d\tau\,. \quad (45)$$

Решение будем искать в виде:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1\,. \qquad (46)$$

Подставим соотношение (46) в уравнение (43) с учетом соотношения (44), получим:

$$D_t^{2\alpha}(u_0 + \varepsilon u_1) - (u_0 + \varepsilon u_1)_{xx} = \sin(u_0 + \varepsilon u_1)\,, \quad (47а)$$

$$u_{0tt} + \varepsilon D_1^2 u_0 + \varepsilon u_{1tt} + \varepsilon^2 D_1^2 u_1 - u_{0xx} - \varepsilon u_{1xx} =$$
$$= \sin u_0 + \varepsilon u_1 \cos u_0\,, \qquad (48б)$$

$$(u_{0tt} - u_{0xx}) + \varepsilon(D_1^2 u_0 + u_{1tt} - u_{1xx}) + \varepsilon^2 D_1^2 u_1 =$$
$$= \sin u_0 + \varepsilon u_1 \cos u_0\,. \qquad (49в)$$

Разделяя уравнение (49в) по степеням ε, получим систему уравнений:

$$u_{0tt} - u_{0xx} = \sin u_0\,, \qquad (50а)$$

$$D_1^2 u_0 + u_{1tt} - u_{1xx} = u_1 \cos u_0\,. \qquad (50б)$$

Для дальнейшего решения введем замену переменных:

$$\varsigma = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\,. \qquad (51)$$

Тогда решением уравнения (50а) будет:

$$u_0 = 4arctg\exp\varsigma\,. \qquad (52)$$

Решением (52) является кинк. Решение (52) описывает возбуждение в молекуле ДНК, называемое расплетанием. Мономеры совершают вращательные движения вокруг спирали, следовательно для угловых функций должны быть определенные ограничения и условия:

$$\lim_{\varsigma\to\pm\infty} u_1 = 0\,,\ \ u_1(0) = 0\,. \qquad (53)$$

Условие (53) следует из условий:

$$\lim_{\varsigma\to-\infty} u = 0\,,\ \ \lim_{\varsigma\to+\infty} u = 2\pi\,,\ \ u(0) = 0\,, \quad (54)$$

и

$$\lim_{\varsigma\to-\infty} u_0 = 0\,,\ \lim_{\varsigma\to+\infty} u_0 = 2\pi\,,\ u_0(0) = 0\,. \quad (55)$$

Перепишем уравнение (50б) в новых переменных:

$$u_{1\varsigma\varsigma} - u_1\cos u_0 = D_1^2 u_0\,. \qquad (56)$$

Уравнение (56) позволяет найти отклонение от решения для модели Инглендера без учета фрактальности. Подставив решение (52) в уравнение (56) получим:

$$u_{1\varsigma\varsigma} - \frac{1 - 6e^{2\varsigma} + e^{4\varsigma}}{(1 + e^{2\varsigma})^2}u_1 = D_1^2 u_0\,. \qquad (57)$$

Для решения уравнения (57), решим следующее уравнение:

$$u_{1\varsigma\varsigma} - \frac{1 - 6e^{2\varsigma} + e^{4\varsigma}}{(1 + e^{2\varsigma})^2}u_1 = 0\,. \qquad (58)$$

Учитывая условие (53) получим решение уравнения (58):

$$u_1 = \frac{1}{4}u_{1\varsigma}(0)sch(\varsigma)(2\varsigma + sh(2\varsigma))\,. \qquad (59)$$

Из решения (59) следует, что решение уравнения (57) следует искать в виде:

$$u_1 = C(\varsigma)A(\varsigma)\,, \qquad (60)$$

где $C(\varsigma)$ искомая функция, а

$$A(\varsigma) = \frac{1}{4}sch(\varsigma)(2\varsigma + sh(2\varsigma))\,, \qquad (61)$$

вид которой представлен на рис. 1, из которого видно, что данная функция расходящаяся.

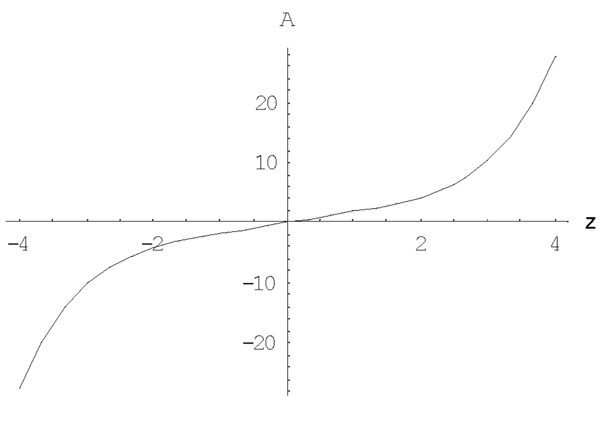

Рис. 1. График функции $A(\varsigma)$

Так как функция $A(\varsigma)$ расходящаяся, то из условия (53) следует, что $C(\varsigma)$ должна быть сходящейся.

Подставим соотношение (60) в уравнение (57):

$$C_{\varsigma\varsigma}A - 2C_{\varsigma}A_{\varsigma} = D_1^2 u_0 . \tag{62}$$

Введем замену:

$$C_{\varsigma} = p , \tag{63}$$

тогда уравнение (62) примет вид:

$$p_{\varsigma}A - 2pA_{\varsigma} = D_1^2 u_0 , \tag{64}$$

для решения которого необходимо решить уравнение:

$$p_{\varsigma}A - 2pA_{\varsigma} = 0 . \tag{65}$$

Решение уравнения (65) является соотношение:

$$p = \frac{p_0(\xi)}{A^2} . \tag{66}$$

Подставляя (66) в (64) получим:

$$\frac{p_{0\varsigma}}{A^2} = D_1^2 u_0 , \tag{67}$$

решение которого имеет вид:

$$p_0 = \int D_1^2 u_0 A^2(\varsigma) d\varsigma . \tag{68a}$$

Переходя от переменных ς к переменным x, t, получим:

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \int D_1^2 u_0(t) A^2(x,t) dx - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \int D_1^2 u_0(t) A^2(x,t) dt . \tag{68б}$$

Подставляя (68б) в соотношение (66) получим:

$$p = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{\int D_1^2 u_0(t) A^2(x,t) dx}{A^2(x,t)} - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \frac{\int D_1^2 u_0(t) A^2(x,t) dt}{A^2(x,t)} . \tag{69}$$

Подставляя соотношение (69) в (63) получим:

$$C_{\varsigma} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{\int D_1^2 u_0(t) A^2(x,t) dx}{A^2(x,t)} - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \frac{\int D_1^2 u_0(t) A^2(x,t) dt}{A^2(x,t)} , \tag{70}$$

откуда получаем искомую функцию:

$$C = \frac{1}{1-v^2} \int A^{-2}(x,t) \left(\int D_1^2 u_0(t) A^2(x,t) dx \right) dx + \frac{v^2}{1-v^2} \int A^{-2}(x,t) \left(\int D_1^2 u_0(t) A^2(x,t) dt \right) dt - \frac{v}{1-v^2} \left(\int A^{-2}(x,t) \left(\int D_1^2 u_0(t) A^2(x,t) dt \right) dx + \int A^{-2}(x,t) \left(\int D_1^2 u_0(t) A^2(x,t) dx \right) dt \right), \tag{71}$$

подставив которую в соотношение (60) получаем искомое решение.

Решение фрактального уравнения (43) с помощью теории возмущения приводит к системе уравнений (50а), (50б). Чтобы получить качественные представления о решении данной системы положим, что

$$D_1^2 u_0 = \kappa u_{0\varsigma\varsigma} . \tag{72}$$

Подставив соотношение (72) в уравнение (57) получим:

$$u_{1\varsigma\varsigma} - \frac{1 - 6e^{2\varsigma} + e^{4\varsigma}}{(1+e^{2\varsigma})^2} u_1 = \kappa u_{0\varsigma\varsigma} . \tag{73}$$

Уравнение (73) имеет решение:

$$u_1 = \frac{e^{-\varsigma}\left(e^{4\varsigma}(C+\kappa) + 4e^{2\varsigma}\varsigma(C-\kappa) - (C+\kappa)\right)}{4(1+e^{2\varsigma})} , \tag{74}$$

где $C = u_{1\varsigma}(0)$. Из соотношения (74) можно сделать вывод, что функция u_1 является сходящейся лишь в случае, когда

$$C = -\kappa . \tag{75}$$

Тогда решение (74) примет вид:

$$u_1 = 2Ce^{-\varsigma} \frac{e^{2\varsigma}\varsigma}{1+e^{2\varsigma}} , \tag{76}$$

вид которой представлен на рис. 2.

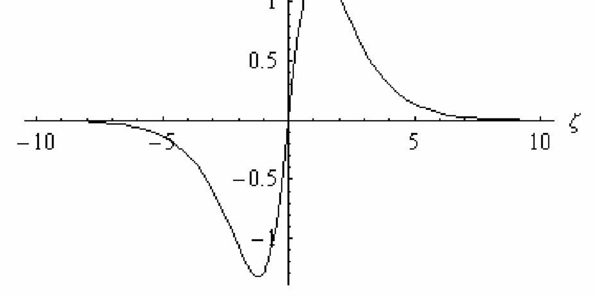

Рис. 2. График функции u_1 для $C > 0$

Решением уравнения (43) в приближении до первого члена будет:

$$u = 4arctg\exp\varsigma + 2\varepsilon Ce^{-\varsigma}\frac{e^{2\varsigma}\varsigma}{1+e^{2\varsigma}}, \quad (77)$$

в котором приведена поправка с учетом фрактальности.

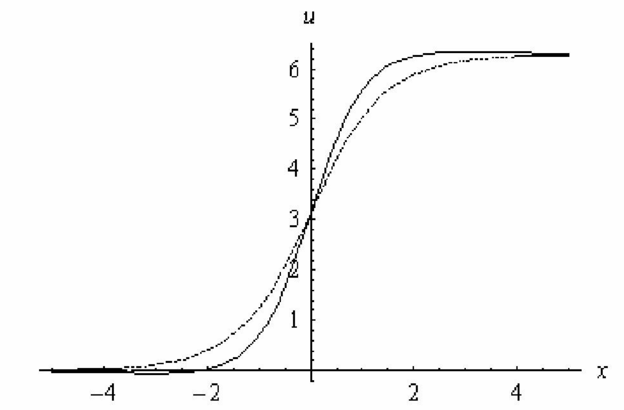

Рис. 3. Решение типа кинк: сплошной линией изображен кинк с учетом фрактальности, а пунктирной без учета фрактальности

Вид кинка представлен на рис. 3 при $\varepsilon t << 1$, при этом С=1 и $\varepsilon \sim 0.1$.

9. Решение для модели Инглендера в терминах гельдеровской дробной производной по времени. В некотором приближении в уравнении (16) заменим производную Римана-Луивилля гельдеровской производной:

$$D_t^{2\alpha} \to \frac{\partial^2}{\partial t^{2\alpha}}. \quad (78)$$

Тогда уравнение (16) перепишется в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^{2\alpha}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0. \quad (79)$$

Введя замену:

$$\tau = t^\alpha, \quad (80)$$

получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0. \quad (81)$$

Уравнение (81) является уравнением синус-Гордона, решение которого имеет вид:

$$u = 4arctg\exp\frac{x - v\tau}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (82)$$

Подставив в решение (82) подстановку (80), получим:

$$u = 4arctg\exp\frac{x - vt^\alpha}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (83)$$

Решение (83) есть решение для фрактальной молекулы ДНК в терминах гельдеровской производной. Вообще, гельдеровская производная полезна для решения задач связанных с фрактальными структурами и позволяет говорить о качественном поведении решения. Поскольку $0 < \alpha < 1$, то кинк во фрактальных структурах будет запаздывать относительно кинка в структурах с целым показателем $\alpha = 1$.

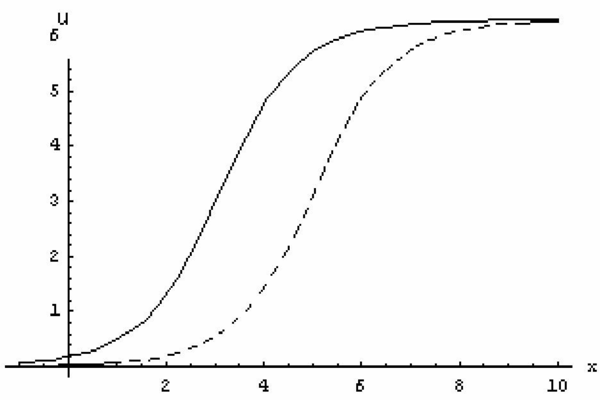

Рис. 4. Кинк для фрактальной среды (сплошная линия) и для нефрактальной среды (пунктирная линия)

На рис. 4 представлен вид кинка для $t \sim 5c.$ и $\alpha \sim 0.7$. С течением времени расстояние между кинками для фрактальной и нефрактальной среды будет заметно увеличиваться.

10. Заключение. В данной работе нами обсуждены модели с учетом фрактальности, в которой применен переход от координат с дробным показателем Хаусдорфа к координатам с целым показателем, а также рассмотрены модели с учетом дробной производной Римана-Луивилля. Представлены поведения кинка для фрактальных сред на основе решения для лианизированных моделей Инглендера и Якушевич с учетом фрактальности среды, а так же на основе решения с помощью метода теории возмущения. Использование гельдеровской производной позволило характеризовать движение кинка вдоль молекулы ДНК.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Englander S.W., Kallenbach N.R., Heeger A.J., Krumhansl J.A., Litwin A.* // Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1980. № 77. С. 7222-7230.

2. *Yakushevich L.V.* // Nonlinear Physics of DNA, Wiley, Chichester, 1998. 230 c.

3. *Peyrard M.* // Nonlinearity. 2004. №17. С. 33-41.

4. *Salerno* // Phys. Rev. A., 1991. № 44. С. 5292-5302.

5. *Peng C.K., Buldyrev S.V., Goldberger A.L., Havlin S., Sciortino F., Simons M., Stanley H.E.* // Nature. 356. 1992. С. 168-171.

6. *Peng C.K., Buldyrev S.V., Havlin S., Simons M., Stanley H.E., Goldberger A.L.* // Phys. Rev. E 49. 1994. С. 1685-1697.

7. *Мырзакулов Р., Данлыбаева А.К., Жунусов К.Х.* Об однородной геометрической модели молекулы ДНК // Вестник КазНУ. Серия физическая. 2006. № 1(21). С. 31-35.

8. *Мырзакулов Р.* Биология с точки зрения физика и математика // Известия НАН РК. 2005. №4. С. 45-52.

9. *Мырзакул Т.Р., Мырзакулов Р.* О нелинейной динамике нанотрубки и молекулы ДНК // Мат. 5-ой межд. конф. «Хаос и структуры в нелинейных системах. Теория и эксперимент», ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, 15-17 июня, 2006 г., Астана. С. 179-182.

10. *Райымкулов М.А., Каныгина О.Н., Мырзакулов Р.* О нелинейных возбуждениях и нанофизике ДНК // Вестник ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, 2006, №6. С. 62-70.

11. *Raiymkulov M.A.* Nonlinear Dynamics of DNA with Low-Level Fractionality // Abstracts of the Seventh International Conference «Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics» Kiev, Ukraine, June 24-30, 2007.

12. *Райымкулов М.А., Каныгина О.Н., Мырзакулов Р.* Нелинейные возбуждения и нанофизика молекулы ДНК в неоднородном поле // Вестник ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, 2007. №2. С. 60-69.

13. *Кожамкулов Т.А., Райымкулов М.А., Белисарова Ф.Б., Мырзакулов Р.* Фрактальное уравнение динамики молекулы ДНК // Вестник КазНУ. Серия физическая. 2007 (в печати).

14. *Кожамкулов Т.А., Райымкулов М.А., Белисарова Ф.Б., Мырзакулов Р.* Нанодинамика движения солитона в гетероструктурной молекуле ДНК // Вестник КазНУ. Серия физическая. 2007 (в печати).

15. *Райымкулов М.А.* Уравнение динамики молекулы ДНК с учетом фрактальности // Материалы научно-методической конференции "Теория и методика обучения физико-математическим дисциплинам", КазНПУ им. Абая, Алматы, 26-27 апрель 2007 г. С. 123-126.

16. *Райымкулов М.А.* Фазовые пространства кинка в молекуле ДНК с учетом фрактальности // Труды международной научной конференции молодых ученых "Наука и образование-2007", ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, Астана, 20-21 апреля 2007 г. С. 1132-1136.

17. *Райымкулов М.А., Мырзакулов Р.* Математическое моделирование нелинейных процессов в молекуле ДНК с учетом фрактальных структур // Мат. респуб. науч. конф. "Моделирование механических систем и процессов", КарГУ им. Е. А. Букетова, 5-6 октября 2007 г. С. 195-197.

Резюме

Хаусдорфтың бөлшек көрсеткіштік және Риман-Лиувилльдің бөлшек туындылы фракталды модельдері талқыланады. Инглендер мен Якушевич модельдерінің шешімдері келтірілген.

Summary

We consider the fractional generalizations of equation of Englander and Yakushevich models. We use Haudsorf fractional dimensional and classical Riemann-Liouville derivative.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы;

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, г. Астана

Поступила 01.11.07г.