УДК 519.633

А. С. ОМУРАЛИЕВ, Д. А. САДЫКОВА

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С НУЛЕВОЙ ТОЧКОЙ СПЕКТРА

Строится регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной двумерной параболической задачи в областях с угловыми точками границы и кратной нулевой точкой спектра предельного оператора.

Данная работа посвящена построению регуляризованной асимптотики [1] решения задачи

$$L_\varepsilon u(x,y,t,\varepsilon)\equiv \varepsilon\partial_t u-\varepsilon^2 a(x)\partial_x^2 u - L(t)u = f(x,y,t), \qquad (x,y,t)\in Q, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0}=h(x,y), \quad \partial\big|_{\partial\Omega}=0.$$

Здесь $\varepsilon>0$ - малый параметр, $Q=\Omega\times(0,T]$, $\Omega=\{(x,y):x,y\in(0,1)\}$, $\partial\Omega$ - граница области Ω, оператор $L(t)\equiv-\partial_y^2+b(y,t)$ действует в гильбертовом пространстве H при каждом $t\in[0,T]$.

Задача (1) изучается при следующих предположениях:

1. Функция $a(x)>0$ для любого $x\in[0,1]$;

2. $a(x)\in C^\infty[0,1]$, $f(x,y,t)\in C^\infty(\overline{Q})$;

3. Оператор простой структуры $L(t)$ при каждом $t\in[0,T]$ имеет дискретный спектр

$$L(t)\psi_k(y,t)=\lambda_k(t)\psi_k(y,t), \qquad \psi_k(y,t)\big|_{y=0}=\psi_k(y,t)\big|_{y=1}=0; \tag{2}$$

удовлетворяющий условиям

$$\mathrm{Re}\big(\lambda_{p+i}(t)\big)\le 0,\ \lambda_k(t)\equiv 0\ \ \forall k=1,2,\ldots,p,$$

$$\lambda_{p+i}(t)\ne\lambda_{p+j}(t)\ \ \forall i\ne j,\ \forall t\in[0,T]\, i,j\ge 1;$$

4. Система собственных функций $\psi_k(y,t)$ при каждом $t \in [0,t]$ образует полную ортонормированную систему функций в некотором гильбертовом пространстве H;

5. Гладкость заданных функций и спектра таковы, что все ряды по собственным функциям и ряды, полученные почленным дифференцированием по x, t до любого порядка и по y до второго порядка, сходятся в пространстве H;

6. Выполняется условие согласования начальных и граничных условий:

$$h = (0, y) = h(1, y) = 0;$$

7. Для правой части выполняются условия:

$$\forall x \in [0,1], t \in [0,T] \qquad (f(x,y,t), \qquad) = 0, \; k.$$

Условие 7) не является обязательным, если это условие отсутствует, то асимптотическое разложение будет начинаться с отрицательной степени малого параметра.

Ранее задача (1), при отсутствии нулевой точки спектра, изучена в работе [2]. Случай, когда одна из точек спектра обращается в нуль, в конечном числе точек отрезка, рассмотрена в [3].

В данной статье строится регуляризованная асимптотика решения поставленной задачи, эта асимптотика содержит экспоненциальные, параболические [4, 5] и угловые [6, Глава 3,§ 9] погранслойные функции.

П.1. Регуляризация задачи. Согласно методу регуляризации [1], вводим регуляризующие функции по формулам

$$\eta_{p+i} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{p+i}(s)ds, \quad i = 1,2\ldots, \tau = \frac{t}{\varepsilon^2},$$

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^3}}\varphi_j(x), \quad \zeta_j = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\varphi_j(x), j = 1,2,$$

$$\varphi_j(x) = (-1)^{j-1}\int_{j-1}^{x} \frac{ds}{\sqrt{a(s)}}. \tag{3}$$

Пусть $\theta = (\xi, \zeta, \tau, \eta)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2), \zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, $\eta = (\eta_{p+1, p+2}, \ldots)$ являются независимыми переменными новой функции $\tilde{u}(M, \varepsilon)$, $M = (x, y, t, \theta)$ такой, что ее сужение совпадает с решением исходной задачи (1),т.е.

Пусть $\theta = (\xi, \zeta, \tau, \eta)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, $\eta = (\eta_{p+1}, \eta_{p+2}, \ldots)$ являются независимыми переменными новой функции $\tilde{u}(M, \varepsilon), M = (x, y, t, \theta)$ такой, что ее сужение совпадает с решением исходной задачи, т.е.

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)\Big|_{\theta=\theta(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x,y,t,\varepsilon), \tag{4}$$

$$\theta(x,t,\varepsilon) = \left(\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon^3}}, \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda(s)ds\right), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \quad \lambda = (\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots).$$

Из (4), с учетом (3), найдем u , тогда на основании (4) и (1), для определения расширенной функции $\tilde{u}(M, \varepsilon)$ поставим следующую задачу:

$$\widetilde{L}_\varepsilon \widetilde{u}(M,\varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon} T_1 \widetilde{u} + T_2 \widetilde{u} + \sqrt{\varepsilon} L_\xi \widetilde{u} + \varepsilon T_3 \widetilde{u} + \varepsilon\sqrt{\varepsilon} L_\zeta \widetilde{u} + \varepsilon^2 L_x \widetilde{u} = f(x,y,t), \quad M \in W$$

$$\widetilde{u}\big|_{\tau=t=0} = h(x,y), \quad \widetilde{u}\big|_{\partial W} = 0, \quad W = Q \times (0,\infty) \times (0,\infty) \times (0,\infty) \times (-\infty,0), \tag{5}$$

где

$$T_1 \equiv \partial_\tau - \sum_{j=1}^{2} \partial^2_{\xi_j}, \quad T_2 \equiv \sum_{i+1}^{\infty} \lambda_{p+i}(t) \partial_{\eta_{p+i}} - L(t), \quad T_3 \equiv \partial_t - \sum_{j=1}^{2} \partial^2_{\zeta_j},$$

$$L_\xi \equiv -a(x) \sum_{j=1}^{2} L_{\xi,j}, \quad L_\zeta \equiv -a(x) \sum_{j=1}^{2} L_{\zeta,j}, \quad L_{\zeta,j} \equiv 2\varphi'_j(x) \partial^2_{x,\zeta_j} + \varphi''(x) \partial_{\xi_j},$$

$$L_{\xi,j} \equiv 2\varphi'_j(x) \partial^2_{x,\zeta_j} + \varphi''_j(x) \partial_{\xi_j} \quad L_x \equiv -a(x) \partial^2_x, \quad M = (x,y,t,\theta).$$

Если мы найдем решение $\widetilde{u}(M,\varepsilon)$ расширенной задачи (5), то сужение его при $\theta = \theta(x,t,\varepsilon)$ будет решением задачи (1) ибо

$$\left(\widetilde{L}_\varepsilon \widetilde{u}(M,\varepsilon)\right)\Big|_{\theta=\theta(x,t,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon u(x,y,t,\varepsilon). \tag{6}$$

Решение расширенной задачи (5) ищем в виде разложения

$$\widetilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{2}} u_k(M)). \tag{7}$$

После известных процедур, для коэффициентов ряда (7) получим следующие итерационные задачи:

$$T_1 u_\nu(M) = 0, \quad \nu = 0,1, \quad u_0(M)\big|_{t=\tau=0} = h(x,y), \quad u_0(M)\big|_{\partial W} = 0,$$

$$T_1 u_2(M) = f(x,y,t) - T_2 u_0(M),$$

$$T_1 u_k(M) = -[T_2 u_{k-2}(M) + L_\xi u_{k-3}(M) + T_3 u_{k-4}(M) + L_\zeta u_{k-5}(M) + L_x u_{k-6}(M)],$$

$$u_k(M)\big|_{t=\tau=0} = 0, \quad u_k(M)\big|_{\partial W} = 0, \quad k \geq 1. \tag{8}$$

П.2. Решение итерационных задач. Каждую из итерационных задач будем решать в классе функций

$$U = \{u(M) : u(M) = < \upsilon(x,t) + \sum_{l=1}^{2} u_l(N_l), \psi(y,t) > + < C(x,t) + \sum_{l=1}^{2} \Omega^l(x,t) erfc\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}\right) e^h,$$

$$\psi\left(y,t >, \left|u_{l,i}(N_l)\right| < c \exp\left(\frac{\xi_l^2}{8\tau}\right)\right),$$

$$erfc\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \exp(-s^2) ds, \}$$

$$\upsilon(x,t) = (\upsilon_1(x,t), \upsilon_2(x,t), \ldots) \qquad u_l(N_l) = (u_{l,1}(N_l), u_{l,2}(N_l), \ldots),$$

$$C(x,t) = (c_{i,p+j}(x,t)), \quad \Omega^l(x,t) = (\omega^l_{i,p+j}(x,t)), \quad N_l = (x,y,t,\xi_l,\tau),$$

$$\psi(y,t) = (\psi_1(y,t), \psi_2(y,t), \ldots), \quad \eta = (\eta_{p+1}, \eta_{p+2}, \ldots), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad i,j \geq 1,$$

$$< \upsilon(x,t), \psi(y,t) >= \sum_{i=1}^{\infty} \upsilon_i(x,t) \psi_i(y,t), \quad < C(x,t) e^h, \psi(y,t) >= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{i,p+j}(x,t) e^{\eta_{p+j}} \psi_i(y,t),$$

Вычислим действие операторов $T_1, T_2, L_\xi, T_3, L_\zeta, L_x$ на функции класса U. Имеем

$$T_1 u = \sum_{l=1}^{2} < T_{1,l} u_l(N_l), \psi(y,t) >, \quad T_{1,l} \equiv \partial_\tau - \partial_{\xi_l}^2,$$

$$T_2 u = - < \Lambda(\lambda(t)) \left[\upsilon(x,t) + \sum_{l=1}^{2} u_l(N_l) \right], \quad \psi(y,t) > + \; < \left[C(x,t)\Lambda_1(\lambda(t)) - \Lambda(\lambda(t)) C(x,t) \right] e^\eta,$$

$$\psi(y,t) > + \sum_{l=1}^{2} < \left[\Omega^l(x,t)\Lambda_1(\lambda(t)) - \Lambda(\lambda(t))\Omega^l(x,t) \right] e^\eta, \quad \psi(y,t) > erfc\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}} \right),$$

$$\Lambda_1(\lambda(t)) = diag(\lambda_{p+1}(t)\lambda_{p+2}(t), \ldots),$$

$$\Lambda(\lambda(t)) = diag\left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{p}, \lambda_{p+1}(t), \lambda_{p+2}(t), \ldots \right),$$

$$T_3 u = < \partial_t \upsilon(x,t) + A^T(t)\upsilon(x,t) + \sum_{l=1}^{2} \left[\partial_t + A^T(t) \right] u_l(N_l), \psi(y,t) > +$$

$$+ < \left[\partial_t C(x,t) + A^T(t) C(x,t) \right] e^\eta, \psi(y,t) > +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} < \left[\partial_t \Omega^l(x,t) + A^T(t)\Omega^l(x,t) \right] e^\eta, \psi(y,t) > erfc\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}} \right),$$

$$L_\xi u = -a(x) \sum_{l=1}^{2} < L_{\xi,l} u_l(N_l), \psi(y,t) >, \quad A^T(t) = (\alpha_{j,i}(t)), \quad i, j \ge 1,$$

$$L_\zeta u = -a(x) \sum_{l=1}^{2} \partial_{\zeta_l} erfc\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}} \right) < D_{x,l}\Omega^l(x,t)^\eta, \quad \psi(y,t) >$$

$$D_{x,l} \equiv 2\varphi_l'(x)\partial_x + \varphi_l''(x), \quad \alpha_{i,j}(t) = (\partial_t \psi_i(y,t), \psi_j(y,t)). \tag{9}$$

Рассмотрим итерационные задачи (8). Уравнения $(8, \; \nu = 0{,}1)$ однородные, поэтому эти уравнения разрешимы в U и решения представимы в виде

$$u_\nu(M) = < \left[C^\nu(x,t) + \sum_{l=1}^{2} \Omega^{l,\nu}(x,t) erfc\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}} \right) \right] e^\eta,$$

$$\psi(y,t) > + < \left[\upsilon_\nu(x,t) + \sum_{l=1}^{2} u_l^\nu(N_l) \right], \; \psi(y,t) >, \tag{10}$$

если функция $u_{l,i}^\nu(N_l)$ будет решением уравнения

$$\partial_\tau u_{l,i}^\nu(N_l) - \partial_{\xi_l}^2 u_{l,i}^\nu(N_l) = 0, \quad \nu = 0{,}1; \; i \ge 1, l = 1{,}2. \tag{11}$$

Удовлетворяя функцию (10) краевым условиям из (8), предварительно разложив начальную функцию $h(x,y)$ по собственным функциям $\psi_i(y,0)$, получим следующие соотношения:

$$c^{\nu}_{p+i,p+i}(x,t)\big|_{t=0}=-\upsilon_{\nu,p+i}(x,0)-\sum_{j=1(j\neq i)}^{\infty}c^{\nu}_{p+i,p+j}(x,0)+h^{\nu}_{p+i}(x),\quad u^{\nu}_{l,i}(N_l)\big|_{t=\tau=0}=0,$$

$$\omega^{l,\nu}_{i,p+j}(x,t)\big|_{t=0}=p^{l,\nu}_{i,p+j}(x),\ \upsilon_{1,p+i}(x,t)\big|_{t=0}=-\sum_{j=1}^{\infty}c_{q,p+j}(x,0)+h^{\nu}_{q}(x),\quad q=1,2,\ldots,p,$$

$$h^0_i(x)=(h(x,y),\psi_i(y,0)),\quad h^1_i(x)=0,\quad \omega^{l,\nu}_{i,p+j}(x,t)\big|_{x=l-1}=-c^{\nu}_{i,p+j}(l-1,t),\quad \nu=0,1$$

$$u^{\nu}_{l,i}(N_l)\big|_{\xi_l=0}=d^{\nu}_{l,i}(x,t),\ d^{\nu}_{l,i}(x,t)\big|_{x=l-1}=-\upsilon_{\nu,i}(l-1,t),\ i,j\geq 1,\quad l=1,2. \tag{12}$$

Решение уравнения (11), при соответствующих краевых условиях из (12), запишется в виде

$$u^{\nu}_{i,l}(N_l)=d^{\nu}_{i,l}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau}}\right),\quad \nu=0,1. \tag{13}$$

Перейдем к следующей итерационной задаче (8, i = 2). Уравнение (8, i = 2), согласно вычислениям (9), разрешимо тогда и только тогда, когда

$$H(x,t)+\Lambda(\lambda(t))\upsilon_0(x,t)=0,$$
$$C^0(x,t)\Lambda_1(\lambda(t))-\Lambda(\lambda(t))C^0(x,t)=0,$$
$$\Omega^{k,0}(x,t)\Lambda_1(\lambda(t))-\Lambda(\lambda(t))\Omega^{l,0}(x,t)=0,$$
$$H(x,t)=(f_1(x,t),f_2(x,t),\ldots),\quad f_i(x,t)=(f(x,y,t),\psi_i(y,t)).$$

На основании условия 7), первая система разрешима, при этом $\upsilon_{0,л}(x,t),\ k=1,2,\ldots,p$ произвольны, а остальные компоненты определяются формулой

$$\upsilon_{0,p+i}(x,t)=-\frac{f_{p+i}(x,t)}{\lambda_{p+i}(t)},\quad i\geq 1.$$

Вторая и третья системы имеют решения

$$c^0_{i,p+j}(x,t)=0,\ \omega^{l,0}_{i,p+j}(x,t)=0,\ i,j\geq 1,\ i\neq p+j,\ l=1,2,$$

а функции $c^0_{p+i,p+i}(x,t),\ \omega^{l,0}_{p+i,p+i}(x,t)$ пока произвольны. После такого выбора, уравнение (8, i = 2) разрешимо в классе U и его решение и представимо в виде (10) с индексом $\nu=2$, если функции $u^2_{i,l}(N_l)$ являются решениями уравнений

$$\partial_\tau u^2_{l,i}(N_l)-\partial^2_{\xi_l}u^2_{l,i}(N_l)=0,\quad \forall i=1,\ldots,p$$
$$\partial_\tau u^2_{l,p+j}(N_l)-\partial^2_{\xi_l}u^2_{l,p+j}(N_l)=\lambda_{p+j}(t)u^0_{l,p+j}(N_l),\quad j\geq 1.$$

Решение этого уравнения, при краевых условиях из (11), можно записать в виде

$$u^2_{l,i}(N_l)=d^2_{l,i}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau}}\right)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^\infty\frac{\lambda_i(t)u^0_{l,i}(M)}{\sqrt{(\tau-s^3)}}\times$$

$$\times\left[\exp\left(-\frac{(\xi_l-y)^2}{4(\tau-s)}\right)-\exp\left(-\frac{(\xi_l+y)^2}{4(\tau-s)}\right)\right]dsdy,\ l=1,2,\quad i\geq 1. \tag{14}$$

Исходя из вида выражения функции $u^0_{l,p+i}(M)$, для интервала стоящего в правой части, на основании леммы из [2], справедлива оценка

$$|I| \le c \exp\left(\frac{\xi_l^2}{8\tau}\right),$$

поэтому и вся функция имеет такую оценку.

Чтобы решение задачи (8, $i = 3$) существовало в классе U, мы должны избавиться от отдельных членов, полагая

$$\Lambda(\lambda(t))\upsilon_1(x,t) = 0, \quad C^1(x,t)\Lambda_1(\lambda(t)) - \Lambda(\lambda(t))C^1(x,t) = 0,$$
$$\Omega^{l,1}(x,t)\Lambda_1(\lambda(t)) - \Lambda(\lambda(t))\Omega^{l,1}(x,t) = 0, \quad D_{x,l}d_l^0(x,t) = 0, \ \forall l = 1,2.$$

Из этих систем определяем $\upsilon_{1,p+i}(x,t) = 0$, $c^1_{i,p+i}(x,t) = 0$, $\omega^{l,1}_{i,p+i}(x,t) = 0$, $i \ge 1$, $\upsilon_{1,k}(x,t)$, $k = 1,2,\dots,p$, $c^1_{p+i,p+i}(x,t)$, $\omega^{l,1}_{p+i,p+i}(x,t)$, $i \ge 1$ произвольные функции. Решая уравнение относительно $d^0_{l,i}(x,t)$, при начальном условии $d^0_{i,l}(x,t)\big|_{x=l-1} = -\upsilon_0(l-1,t)$ определяем функцию $d^0_{l,i}(x,t)$. Тогда уравнение (8, $i = 3$) с такой правой частью разрешимо в U и его решение представимо в виде (10) с индексом $\nu = 3$.

В следующем шаге, обеспечивая разрешимость уравнения (8, $i = 4$) в классе U, (16) положим

$$\begin{gathered}\Lambda(\lambda(t))\upsilon_2(x,t) = \partial_t\upsilon_0(x,t) + A^T(t)\upsilon_0(x,t),\\ C^2(x,t)\Lambda_1(\lambda(t)) - \Lambda(\lambda(t))C^2(x,t) = \partial_t C^0(x,t) + A^T(t)\upsilon_0(x,t),\\ \Omega^{l,2}(x,t)\Lambda_1(\lambda(t)) - \Lambda(\lambda(t))\Omega^{l,2}(x,t) = \partial_t\Omega^{l,0}(x,t) + A^T(t)\Omega^{l,0}(x,t),\\ D_{x,l}d_1^l(x,t) = 0, \ A^T(t) = (\alpha_{j,i}(t)), \ i,j \ge 1, \ \ \alpha_{i,j}(t) = (\partial_t\psi_i(y,t), \psi_j(y,t)), \ \ l = 1,2.\end{gathered} \tag{15}$$

Решим эти системы. Первая система разрешима тогда и только тогда, когда

$$\partial_t\upsilon_{0,k}(x,t) + \alpha_{k,k}(t)\upsilon_{0,k}(x,t) + \sum_{j=1(j\ne k)}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)\upsilon_{0,j}(x,t) = 0, \quad k = \overline{1,p},$$

при этом $\upsilon_{2,k}(x,t)$, $k = \overline{1,p}$ произвольны, а остальные компоненты определяются формулой

$$col(\upsilon_{2,p+1}(x,t), \upsilon_{2,p+2}(x,t), \dots) = \Lambda_1^{-1}(\lambda(t))col(\partial_t\upsilon_{0,p+1}(x,t) +$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,p+1}(t)\upsilon_{0,j}(x,t), \partial_t\upsilon_{0,p+2}(x,t) + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,p+2}(t)\upsilon_{0,j}(x,t), \dots).$$

Из второй и третьей систем получим соотношения

$$\begin{gathered}\lambda_{p+i}(t)c^2_{k,p+i}(x,t) = \alpha_{p+i,k}(t)c^0_{p+i,p+i}(x,t), \ \ k = \overline{1,p},\\ [\lambda_{p+i}(t) - \lambda_{p+j}(t)]c^2_{p+i,p+j}(x,t) = \alpha_{p+j,p+i}(t)c^0_{p+j,p+j}(x,t), \ \ i \ne j,\\ \partial_t c^0_{p+i,p+i}(x,t) + \alpha_{p+i,p+i}(t)c^0_{p+i,p+i}(x,t) = 0, \quad i,j \ge 1,\\ \lambda_{p+i}(t)\omega^{l,2}_{k,p+i}(x,t) = \alpha_{p+i,k}(t)\omega^{l,0}_{p+i,p+i}(x,t), \quad k = \overline{1,p},\\ [\lambda_{p+i}(t) - \lambda_{p+j}(t)]\omega^{l,2}_{p+i,p+j}(x,t) = \alpha_{p+j,p+i}(t)\omega^{l,0}_{p+j,p+j}(x,t), \ \ i \ne j,\end{gathered}$$

$$\partial_t \omega^{l,0}_{p+i,p+i}(x,t)+\alpha_{p+i,p+i}(t)\omega^{l,0}_{p+i,p+i}(x,t)=0,\ i,j\geq 1.$$

При этом функции $c^2_{p+i,p+i}(x,t),\ \omega^{l,2}_{p+i,p+i}(x,t),\ i\geq 1$ произвольны, а последние соотношения позволяют определить, находящихся до сих пор произвольными $c^0_{p+i,p+i}(x,t),\ \omega^{l,0}_{p+i,p+i}(x,t),\ i\geq 1$ и значения остальных $c^2_{i,p+j}(x,t), \omega^{l,2}_{i,p+j}(x,t),\ \forall i,j\geq 1,\ i\neq p+j$.

Последнее уравнение системы (15), на основании условия $d^l_{1,i}(x,t)\big|_{x=l-1}=0$, позволяет определить, $d^l_{1,i}(x,t)=0$, $i\geq 1$, $l=1,2$.

Далее, повторяя вышеописанный процесс, мы можем определить все коэффициенты частичной суммы ряда (7):

$$u_{\varepsilon,n}(M)=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k u_{2k}(M)=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k\{<\upsilon_{2k}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}u_l^{2k}(N_l),\psi(y,t)>+$$

$$+<\left[C^{2k}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\ erfc\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}\right)\Omega^{l,2k}(x,t)\right]e^{\eta},\psi(y,t)>\}$$

отметим, что коэффициенты с нечетными индексами обратятся в нуль.

Вернемся к исходной задаче (1). При ее регуляризации было использовано свойство (6), которое является необходимым условием регуляризации задачи (1). Оно было использовано при переходе от задачи (1) к задаче (5). Можно показать, что сужение частичной суммы при $\theta=\theta(x,t,\varepsilon)$ является формальным асимптотическим решением задачи (1).

П.3. Оценка остаточного члена. Произведем в задаче (5) сужение посредством регуляризующих функций, т.е. положим в обеих частях уравнения $\theta=\theta(x,t,\varepsilon)$. Далее, учитывая тождество (6), для остаточного члена

$$R_{\varepsilon,2n}(x,y,t)\equiv R_{\varepsilon,2n}(x,y,t,\theta(x,t,\varepsilon))=u(x,y,t,\varepsilon)-u_{\varepsilon,n}(x,y,t,\varepsilon)$$

получим задачу

$$L_\varepsilon R_{\varepsilon,2n}(x,y,t)=g_{2n}(x,y,t,\theta(x,t,\varepsilon)),\quad R_{\varepsilon,2n}\big|_{t=0}=R_{\varepsilon,2n}\big|_{\partial\Omega}=0.$$

В силу наших построений и сделанных предположений 1)-7) функция $g_{2n}(x,y,t,\theta(x,t,\varepsilon)\varepsilon)$ равномерно ограничена по ε и непрерывна по x,y,t в изучаемой области для любого номера $n=0,1,2,\ldots$.

Теорема. *Пусть выполнены условия 1)-7). Тогда для достаточно малых $\varepsilon>0$ имеет место оценка*

$$\left|u(x,y,t,\varepsilon)-u_{\varepsilon,n}(x,y,t,\varepsilon)\right|<c\varepsilon^{n+1}$$

$n=0,1,2,\ldots$т.е. разложение (7) является асимптотическим решением задачи (1) при $\varepsilon\to+0$ и это разложение единственно в классе U.

Доказательство теоремы основано на принципе максимума и вытекает из теоремы 2.1 работы [7, Вводная глава,§ 2]. По аналогии с работой [7], произведем в уравнении для остаточного члена замену

$$R_{\varepsilon,2n}(x,y,t)=\exp(\beta\, t)Z_{\varepsilon,2n}(x,y,t),$$

где β – выбирается таким образом, чтобы $\beta-b(y,t)\neq 0\ \ \forall(0\leq y\leq 1;0\leq t\leq T)$. Далее, доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы об оценке остаточного члена работы [2].

ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

2. *Омуралиев А.С.* Регуляризация двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **46:8** (2006). 1423-1432.

3. *Омуралиев А.С.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной параболической задачи с нестабильным спектром // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Сер. матем., механ., информат. 2006. № 1. С. 99-102; универ. 2002. Вып. 3. С. 85-108.

4. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *УМН.* **12:5** (1957). 3-122.

5. *Исакова Е.К.* Асимптотика решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка параболического типа с малым параметром при старшей производной // *ДАН СССР.* 117:6 (1957). 935-938.

6. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.

7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Резюме

Ерекше ауытқыған екі өлшемді параболалық есеп шекарасында бұрыштық нүктесі бар және туындалған оператордың еселі нөльдік спектрі бар болған жағдайда қарастырылған.

Summary

At the report the asymptotic solution of singular perturbed two-dimential parabolic problem is build in the region with angle points of the border and divisible zero point of the limit operator' spectrum.

Кыргызско-Турецкий университет
«Манас», г. Бишкек

Поступила 17.09.07г.