УДК 517.946.4

М. О. ОРЫНБАСАРОВ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ВЫРАЖАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КЛИНООБРАЗНОЙ ОБЛАСТИ

Методами параболических потенциалов и сингулярных интегральных уравнений доказано существование регулярного решение краевой задачи для вырождающегося параболического уравнения с переменными коэффициентами в нецилиндрической области с негладкой границей.

1. Постановка задачи. Требуется найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнение

$$\rho_0(t)u_t = \sum_{ij=1}^{3} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{3} b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u + F(x,t) \tag{1.1}$$

в области

$$\Omega_{\mathrm{T}} = \{(x,t): 0 < x_1 < \infty,\ |x_2| < k(t)x_1, -\infty < x_3 < \infty;\ 0 < t < \mathrm{T}\}$$

с начальным условием

$$U(x,0) = f(x) \tag{1.2}$$

и краевым условиям

$$U(x,t)\big|_{x_2=\pm K(t)x_1} = \varphi_i\left(x^{(i)},t\right), \qquad (1.3)–(1.4)$$

где точка $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset R^3$, $\left(x^{(i)},t\right) = (x_1, \pm K(t)x_1, x_3, t) \in S_{\mathrm{T}}^{i}$,

$$S_{\mathrm{T}}^{(i)} = \Omega_{\mathrm{T}} \cap \{x_2 = \pm K(t)x_1\} \qquad (i = 1,2)$$

граница области Ω_{T}, $i = 1$ соответствует знаку “+”, а $i = 2$ знаку “–”.

Коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют условиям

а) Функция $\rho_0(t) \geq 0$ и $\rho_0(0) = 0$ или ∞ с порядкам вырождения $p < 1$. Тогда интеграл $\rho(t) = \int_0^t \rho_0^{-1}(z)dz$ существует функция $\rho(t) \geq 0$ и $\rho(0) = 0$ с порядком вырождения $q = 1 - p > 0$.

б) Коэффициенты $a_{ij}(x,t) \in C_{x,t}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Omega_T)$ и удовлетворяет условию

$$\lambda_1|\xi|^2 \leq \sum_{ij=1}^{3} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \lambda_2|\xi|^2 \qquad \forall|\xi| \neq 0. \tag{1.5}$$

где λ_i – положительное постоянные.

в) Коэффициенты $b_i(x,t),\ c(x,t) \in C_{x,t}^{\alpha,0}(\Omega_T)$.

г) Матрица $A(x,t) = (a_{ij}(x,t))$ – симметричная.

Заданные функции

$$F(x,t) \in C_{x,\,t}^{\alpha,\,0}(\Omega_{\mathrm{T}}), \qquad f(x) \in C(\Omega_0),$$

$$\varphi_i(x^{(i)},t) \in C\left(S_T^{(i)}\right), \qquad K(t) \in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(0,T) \tag{1.6}$$

и ограничены.

Кроме того заданные функции $f(x)$ и $\varphi_i\left(x^{(i)},t\right)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$f\left(x_1,\pm K(0)x_1,x_3\right)=\varphi_i\left(x^{(i)},0\right),$$
$$\varphi_1\left(0,+0,x_3,t\right)=\varphi_2\left(0,-0,x_3,t\right). \tag{1.7}$$

Примечание. В статье автора [4] доказано существование фундаментального решения (Ф.р.) $G(x,t,\xi,\tau)$ уравнения (1.1) и дифференциальные свойства Ф.р. Здесь будут использованы результаты этой статьи.

2. Объемные и поверхностные потенциалы и их основные свойства.

При помощи Ф.р. $G(x,t,\xi,\tau)$ уравнения (1.1) построим следующие объемные и поверхностные потенциалы:

а) Объемные потенциалы. Рассмотрим следующие интегралы

$$V_0(x,t)=\int_{\Omega_t} f(\xi)G(x,t;\xi,0)d\xi,$$

$$V(x,t)=\int_0^t\frac{d\tau}{\rho_0(\tau)}\int_{\Omega}F(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)d\xi.$$

Для потенциалов $V_0(x,t)$, $V(x,t)$ справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. Пусть $f(x)\in C(\Omega)$ и ограничена. Тогда при $t>0$ функция $V(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}(\Omega_T)$ и удовлетворяет уравнению (0.1) и

$$\lim_{t\to 0}V(x,t)=0 \quad \forall x\in\bar{\Omega}, \qquad \lim_{t\to 0}V(x,t)=f(x) \quad \forall x\in\Omega.$$

Теорема 2.Пусть функция $F(x,t)\in C^{\alpha,0}_{x,t}(\Omega_T)$ и ограниченна. Тогда $V_1(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}(\Omega_T)$ и

$$\rho_0(t)\frac{\partial V_1}{\partial t}=L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)V_1+F(x,t), \qquad V_1(x,0)=0.$$

б) Поверхностные потенциалы. Поверхностными потенциалами простого и двойного слоя назовем соответственно интегралы:

$$\omega(x,t)=\int_0^t\frac{d\tau}{\rho_0(\tau)}\int_{R^n}\sigma(\xi,\rho(\tau))G(x,t;\xi,\tau)dS_\xi,$$

$$W(x,t)=\int_0^t\frac{d\tau}{\rho_0(\tau)}\int_S\mu(\xi,\rho(\tau))\frac{\partial G(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu(\xi,\tau)}dS_\xi,$$

где $\nu(\xi,\tau)$ – конормаль в точке $(\xi,\tau)\in S_T$.

Пусть $S\in C^{1+\alpha}$ (поверхность типа Ляпунова).

Для поверхностных потенциалов $\omega(x,t),W(x,t)$ справедливы следующие утверждения

Теорема 3. Если выполнены условия (0.3)-(0.4) и $\sigma(x,t)\in C(S_T)$, то

1. $\forall x\bar{\in}S \quad \omega(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}(\Omega_T)$ и является решением уравнения (0.1).

2. $\omega(x,t)$ является непрерывной в $\overline{\Omega}_T$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\omega(x,t)=\omega(x^0,t)$

3. Конормальное производное $\dfrac{\partial\omega}{\partial\nu}$ разрывной функцией на S, причем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\partial\omega}{\partial\nu(x^0,t)}=\mp\frac{1}{2}\sigma(x^0,t)+\frac{\partial\omega(x^0,t)}{\partial\nu(x^0,t)}.$$

Теорема 4. Если выполнены условия (0.3)–(0.4) и кроме того $a_{ij}(x,t)\in C_{x}^{1+\alpha},{}_{t}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\Omega_T)$; плотность $\mu(x,t)\in C(S_T)$ а $S\in C^{1+\alpha}$, то

1. $\forall x\overline{\in}S$ функция $W(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}(\Omega_T)$ и является решением однородного уравнения (0.1).

2. $W(x,t)$ является разрывной функцией на S, причем

$$\lim_{x\to x_0\in S}W(x,t)=\pm\frac{1}{2}\mu(x^0,\rho(t))+W(x^0,t).$$

3. Сведение краевой задачи (1.1)–(1.4) к системе интегральных уравнений. Будем искать решение краевой задачи (1.1)–(1.4) в виде суммы объемных и поверхностных потенциалов.

$$U(x,t)=\int_0^t\frac{d\tau}{\rho_0(\tau)}\int_{\Omega_T^\tau}F(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)d\xi+\int_{\Omega_0}f(\xi)G(x,t;\xi,0)d\xi+$$
$$+2\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\frac{d\tau}{\rho_0(\tau)}\int_{S_\tau^i}\frac{\partial G}{\partial\nu(\xi^{(i)},\tau)}\sigma_i(\xi^{(i)},\rho(\tau))\Big|_{\xi_2=\pm K(\tau)\xi_1}dS^{(i)},\tag{1.8}$$

где $\sigma_i(x^{(i)},t)$ - неизвестные непрерывные функции на $S^{(i)}$; $\nu(\xi^{(i)},\tau)$ - конормаль к границе $S^{(i)}$ в точке $(\xi^{(i)},\tau)\in S^{(i)}$; $\Omega_T^\tau,S_\tau^{(i)}$ - сечения соответственно области Ω_T и границы $S^{(i)}$ с плоскостью $t=\tau$. В силу свойства потенциалов функция $U(x,t)$ определяемая равенством (1.8) удовлетворяют уравнению (1.1) и начальному условию (1.2). Неизвестные функции $\sigma_i(x^{(i)},\rho(t))$ выберем так, чтобы $U(x,t)$ удовлетворяла краевым условиям (1.3)–(1.4). На основании свойства поверхностного потенциала двойного слоя относительно неизвестных функции получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\sigma_i(x^{(i)},t)+\sum_{j=1}^{2}\int_0^t\frac{d\tau}{\rho_0(\tau)}\int_{S_\tau^{(i)}}\sigma_j(\xi^{(j)},\rho(\tau))H_{ij}(x^{(i)},t;\xi^{(j)},\tau)dS^{(i)}=\Phi_i(x^{(i)},t),\tag{1.9}$$

где $H_{ij}(x^{(i)},t;\xi^{(j)},\tau)=2\dfrac{\partial G(x^{(i)},t;\xi^{(j)},\tau)}{\partial\nu(\xi^{(i)},\tau)}$,

$$\Phi_i(x^{(i)},t)=\varphi_i(x^{(i)},t)-\int_{\Omega_0}f(\xi)G(x^{(i)},t;\xi,0)d\xi-\int_0^t\frac{d\tau}{\rho_0(\tau)}\int_{\Omega_\tau^\tau}F(\xi,\tau)G(x^{(i)},t;\xi,\tau)d\xi.$$

Очевидно, что в силу условия (1.6)-(1.7) функции $\Phi_i\left(x^{(i)},t\right)\in C\left(S_T^{(i)}\right)$ ограничены и $\Phi_i\left(x^{(i)},0\right)=0$.

После вычисления конормальной производной $\dfrac{\partial G\left(x^{(i)},t;\xi^{(j)},\tau\right)}{\partial\nu\left(\xi^{(i)},\tau\right)}$ ядра $H_{ij}\left(x^{(i)},t;\xi^{(j)},\tau\right)$ можно в виде

$$H_{ij}\left(x^{(i)},t;\xi^{(j)},\tau\right)=H_{ij}^{(1)}\left(x^{(i)},t;\xi^{(j)},\tau\right)+H_{ij}\left(x^{(i)},t;\xi^{(j)},\tau\right)$$

$$H_{ii}^{(1)}=\frac{\left[K(t)-K(\tau)\right]x_1\left[\det A(\xi^{(j)},\tau)\right]^{-\frac{1}{2}}}{\left(2\sqrt{\pi(\rho(t)-\rho(\tau))}\right)^3(\rho(t)-\rho(\tau))}\exp\left\{-\frac{R^{(\xi^{(j)},\tau)}(x^{(i)}-\xi^{(j)})}{4\left[\rho(t)-\rho(\tau)\right]}\right\}\frac{1}{\sqrt{1+K^2(t)}},\qquad (i=1,2)$$

$$H_{ii}^{(1)}=\frac{\left[K(t)-K(\tau)\right]x_1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{(\rho(t)-\rho(\tau))}\right)^5}\frac{\left[\det A(\xi^{(j)},\tau)\right]^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+K^2(t)}}\exp\left\{-\frac{R^{(\xi^{(j)},\tau)}(x^{(i)}-\xi^{(j)})}{4\left[\rho(t)-\rho(\tau)\right]}\right\},\qquad (i,j=1,2\quad i\neq j)$$

а ядра $H_{ij}^{(2)}(x^{(i)},t,\xi^{(j)},\tau)$ удовлетворяют оценке

$$H_{ij}^{(2)}(x^{(i)},t,\xi^{(j)},\tau)\leq\frac{M}{\left(\sqrt{\rho(t)-\rho(\tau)}\right)^{4-\alpha}}\exp\left\{-\delta\frac{\left|x^{(i)}-\xi^{(j)}\right|^2}{\rho(t)-\rho(\tau)}\right\}.\qquad(1.10)$$

Ядра, удовлетворяющие неравенству (1.10), имеет слабую особенность, поэтому их назовем слабосингулярными.

Легко заметить, что ядра $H_{ij}^{(1)}(x^{(i)},t,\xi^{(j)},\tau)$ $(i\neq j)$ имеет существенную особенность, а $H_{ii}^{(1)}(x^{(i)},t,\xi^{(j)},\tau)$ в силу условия $K(t)\in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(0,T)$ являются слабосингулярным, т.е. удовлетворяют неравенству (1.10).

Выделим главную часть сильносингулярного ядра.

Исследование показывает, что главная часть $H_{ij}^{(1)}(x^{(i)},t,\xi^{(j)},\tau)$ является ядро

$$H_0(x^{(i)}-\xi^{(j)},\rho(t)-\rho(\tau);x^{(j)},t)=\frac{K(t)x_1\left[\det A(x^{(j)},t)\right]^{-\frac{1}{2}}}{4\pi^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{(\rho(t)-\rho(\tau))}\right)^5\sqrt{1+K^2(t)}}\exp\left\{-\frac{R^{(x^{(j)},t)}(x^{(i)}-\xi^{(j)})}{4\left[\rho(t)-\rho(\tau)\right]}\right\}.$$

На самом деле имеет место утверждение:

Лемма 1. Разность $H_{ij}^{(1)}(x^{(i)},t,\xi^{(j)},\tau)-H_0(x^{(i)}-\xi^{(j)},\rho(t)-\rho(\tau);x^{(j)},t)$ является слабосингулярным.

Лемма 1. доказывается стандартным приемом разбивая разность на несколько слагаемых и оценивая каждое слагаемое, используя условия а)-б)-в)-г).

Вводя операторную запись систему интегральных уравнений (1.9) перепишем в виде

$$\begin{aligned}&\sigma_1(x^{(1)},t)+\mathrm{H}_0\sigma_2+\mathrm{H}_{11}\sigma_1+(\mathrm{H}_{12}-\mathrm{H}_0)\sigma_2=\Phi_1(x^{(1)},t)\\&\sigma_2(x^{(2)},t)+\mathrm{H}_0\sigma_1+(\mathrm{H}_{21}-\mathrm{H}_0)\sigma_1+\mathrm{H}_{22}\sigma_2=\Phi_2(x^{(2)},t),\end{aligned}\qquad(1.11)$$

где H_{ij} – интегральные операторы с ядром $\mathrm{H}_{ij}(x^{(i)},t;\xi^{(j)},\tau)$, а H_0 – интегральный оператор с ядром $\mathrm{H}_0(x^{(i)}-\xi^{(j)},\rho(t)-\rho(\tau);x^{(j)},t)$. Отметим, что интегральные операторы H_{ii} $(i=1,2)$ и $\mathrm{H}_{ij}-\mathrm{H}_0$ $(i\neq j)$ слабосингулярные, т.е. их ядра удовлетворяют неравенству (1.10).

4. Решение характеристической системы интегральных уравнений. Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений

$$\sigma_1(x^{(1)},t)+\mathrm{H}_0\sigma_2=g_1(x^{(1)},t)$$
$$\sigma_2(x^{(2)},t)+\mathrm{H}_0\sigma_1=g_2(x^{(2)},t), \tag{1.12}$$

где $g_i(x^{(i)},t)$ непрерывные ограниченные функции и $g_i(x^{(i)},0)=0$. Сначала докажем вспомогательные леммы, которые нам понадобиться для решения системы (1.12).

Лемма 2. Для любых $(x^{(i)},t)\in S_T^{(i)}$ имеет место неравенство

$$\left|H_0\sigma\right|\le\max_{S^{(j)}}\left|\sigma(x^{(j)},t)\right|\frac{\pi-2\theta(t)}{\pi}, \tag{1.13}$$

где

$$arctg2\theta(t)=\frac{2K(t)\sqrt{A_{33}(x,t)}}{a_{22}(x,t)-K(t)a_{11}(x,t)}.$$

Доказательство. С этой целью преобразуем $R^{(x,t)}(x-\xi)$ к виду

$$R^{(x,t)}(x-\xi)\equiv\sum_{ij=1}^{3}a_{ij}(x,t)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)=\frac{\left[A_{33}(x_3-\xi_3)+A_{31}(x_1-\xi_1)+A_{32}(x_2-\xi_2)\right]^2}{A_{33}(x,t)\det A(x,t)}+$$
$$+\frac{\left(A_{11}A_{33}-A_{31}^2\right)(x_1-\xi_1)^2+2\left(A_{12}A_{33}-A_{31}A_{32}\right)(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)+\left(A_{22}A_{33}-A_{32}^2\right)(x_2-\xi_2)^2}{A_{33}(x,t)\det A(x,t)}$$

где $A_{ij}(x,t)$ – алгебраические дополнения элемента $a_{ij}(x,t)$, $A_{33}>0$. В силу следующих, легко проверяемых равенств

$$A_{11}A_{33}-A_{31}^2=a_{22}\det A$$
$$A_{22}A_{33}-A_{32}^2=a_{11}\det A$$
$$A_{12}A_{33}-A_{31}A_{32}=-a_{12}\det A$$

$R^{(x,t)}(x-\xi)$ можно представить в виде

$$R^{(x,t)}(x-\xi)=\frac{\left[A_{33}(x_3-\xi_3)+A_{31}(x_1-\xi_1)+A_{32}(x_2-\xi_2)\right]^2}{A_{33}(x,t)\det A(x,t)}+$$
$$+\frac{a_{22}(x_1-\xi_1)^2-2a_{12}(x_1-\xi_1)^2(x_2-\xi_2)+a_{11}(x_2-\xi_2)^2}{A_{33}(x,t)}$$

Для определенности, рассмотрим случай, когда $(x^{(1)},t)\in S_1$, $(\xi^{(2)},\tau)\in S$. Тогда

$$R^{(x^{(1)},t)}(x^{(1)}-\xi^{(2)})\Big|_{\xi_2=-K(t)\xi_1}=\frac{\left[A_{33}(x_3-\xi_3)+A_{31}(x_1-\xi_1)+K(t)A_{32}(x_1+\xi_1)\right]^2}{A_{33}(x^{(1)},t)\det A(x^{(1)},t)}+$$
$$+\frac{\left[\xi_1\sqrt{Q_{12}(K(t))}-\dfrac{x_1\left[a_{22}(x^{(1)},t)-K^2(t)a_{11}(x^{(1)},t)\right]}{\sqrt{Q_{12}(K(t))}}\right]}{A_{33}(x^{(1)},t)}+\frac{4K^2(t)x_1^2}{Q_{12}(K(t))} \tag{1.14}$$

где $Q_{12}(K(t)) = a_{22}(x^{(1)},t) + 2K(t)a_{12}(x^{(1)},t) + K^2(t)a_{11}(x^{(1)},t) > 0$.

Сделаем замену переменных, полагая

$$\zeta_3 = \frac{A_{33}(x_3-\xi_3) + A_{31}(x_1-\xi_1) + K(t)A_{32}(x_1+\xi_1)}{2\sqrt{A_{33}(x^{(1)},t)\det A(x^{(1)},t)\left[\rho(t)-\rho(\tau)\right]}},$$

$$\zeta_1 = \frac{\xi_1 Q_{12}(K(t)) - x_1\left[a_{22}(x^{(1)},t) - K(t)a_{11}(x^{(1)},t)\right]}{2\sqrt{A_{33}(x^{(1)},t)Q_{12}(K(t))\left[\rho(t)-\rho(\tau)\right]}}, \qquad (1.15)$$

$$z = \frac{K(t)x_1}{\sqrt{Q_{12}(K(t))\left[\rho(t)-\rho(\tau)\right]}}.$$

Тогда, после несложного преобразования, имеем

$$\left|\mathrm{H}_0\sigma\right| \le \max|\sigma| \cdot \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \exp\left\{-z^2\right\}dz \cdot \int_{-zctg\,2\theta}^{\infty} \exp\left\{-\zeta_1^2\right\}d\zeta_1. \qquad (1.16)$$

Теперь, переходя к полярной системе координат в (1.16) окончательно получим неравенство (1.13).

Лемма 3. Если ограниченная функция $\sigma(x^{(2)},t) \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}_{x^{(2)},t}(S_T^{(2)})$ и $\sigma(x^{(2)},0)=0$, то

$$\mathrm{H}_0\sigma \in C^{\alpha,\alpha_0}_{x^{(1)},t} \text{ и } \left.\mathrm{H}_0\sigma\right|_{t=0} = 0 \qquad \alpha_0 = \frac{(1+\alpha)\alpha}{4}. \qquad (1.17)$$

В частности, если $\sigma(x^{(2)},t) \in C(S_T^{(2)})$, то

$$\mathrm{H}_0\sigma \in C(S_T^{(1)}). \qquad (1.18)$$

Доказательство. Для этого сперва продолжим функцию $\sigma(x^{(2)},t)$ для $t<0$, полагая равным нолю и затем сделаем замены переменных по формуле (1.15). Тогда $\mathrm{H}_0\sigma$ преобразуется к виду

$$\mathrm{H}_0\sigma = \frac{2}{\pi^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty dz \int_{-zctg\,2\theta}^{\infty} d\zeta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\sigma}(x_1,x_3,t;\zeta_1,\zeta_3,z)\exp\left\{-z^2-\zeta_1^2-\zeta_3^2\right\}d\zeta_3,$$

где $\overline{\sigma}$ – сложная функция, полученная из $\sigma(\xi^{(2)},\tau)$ после замены по формуле (1.15).

Отсюда в силу условия (1.5) и $K(t) \in C^{\frac{1+\alpha}{2}}$ непосредственно оценивая разность нетрудно получить (1.17) и (1.18).

Теперь перейдем к решению системы (1.12). Норма оператора определим по формуле

$$\left\|\mathrm{H}_0\right\| = \sup_{|\sigma|=1}\left|\mathrm{H}_0\sigma\right|.$$

Из неравенства (1.13) следует оператор $\left\|\mathrm{H}_0\right\|$ будет оператором сжатия, т.е. $\left\|\mathrm{H}_0\right\| < 1$, если

$$0 < \theta(t) < \pi. \qquad (1.19)$$

Геометрически это условие означает, что угол между прямыми $Y = K(t)X$ и $Y = -K(t)X$ не равен нулю. Условие (1.19) является условием разрешимости характеристической системы (1.12) методом последовательных приближений. Из принципа сжатых отображений следует, что при выполнении условие (1.19) система (1.12) имеет единственное решение, которое можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_1(x^{(1)},t) &= \mathrm{H}g_1 - \mathrm{H}_0\mathrm{H}g_2 \\ \sigma_2(x^{(2)},t) &= -\mathrm{H}_0\mathrm{H}g_1 + \mathrm{H}g_2, \end{aligned} \tag{1.20}$$

где $\mathrm{H} = E + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\mathrm{H}_0^2\right)^m$, E – единичный оператор. Причем, в силу леммы-4 решения $\sigma_i(x^{(i)},t)$, определяемые равенствами (1.20) является непрерывными функциями. Таким образом доказана следующая

Теорема 5. Если заданные функции $g_i(x^{(i)},t) \in C(S_T^{(i)})$ ограничены и $g_i(x^{(i)},0) = 0$, кроме того выполнены условия (1.19) и (1.5), то характеристическая система (1.12) имеет единственное непрерывное решение определяемое формулой (1.20).

5. Решение основной системы интегральных уравнений (1.9). Существование решения системы интегральных уравнений (1.9) покажем методом регуляризации [3]. Используя равенства (1.20), систему (1.9) можно заменить следующей эквивалентной системой интегральных уравнений

$$\sigma_i(x^{(i)},t) + \sum_{j=1}^{2} R_{ij}\sigma_j = F_i(x^{(i)},t) \qquad (i = 1,2), \tag{1.21}$$

где

$$\begin{aligned} R_{11} &= \mathrm{H}\mathrm{H}_{11} - \mathrm{H}_0\mathrm{H}(\mathrm{H}_{21} - \mathrm{H}_0) & R_{12} &= \mathrm{H}(\mathrm{H}_{12} - \mathrm{H}_0) - \mathrm{H}_0\mathrm{H}\mathrm{H}_{22} \\ R_{21} &= \mathrm{H}(\mathrm{H}_{21} - \mathrm{H}_0) - \mathrm{H}_0\mathrm{H}\mathrm{H}_{11} & R_{22} &= \mathrm{H}\mathrm{H}_{22} - \mathrm{H}_0\mathrm{H}(\mathrm{H}_{12} - \mathrm{H}_0) \\ F_1(x^{(1)},t) &= \mathrm{H}\Phi_1 - \mathrm{H}_0\mathrm{H}\Phi_2, & F_2(x^{(2)},t) &= \mathrm{H}\Phi_2 - \mathrm{H}_0\mathrm{H}\Phi_1 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Так как $q = \|\mathrm{H}_0\| < 1$, то оператор H удовлетворяет неравенству

$$|\mathrm{H}g| \le \max\left|g(x^{(j)},t)\right|\frac{1}{1-q},$$

т.е. при условии (1.19) H – ограниченный оператор. Поэтому, в силу леммы 4, функции $F_i(x^{(i)},t)$, определяемые равенствами (1.23) ограничены, непрерывны и $F_i(x^{(i)},0) = 0$. Так как операторы R_{ij} являются композициями ограниченных интегральных операторов и интегральных операторов ядра которых удовлетворяют неравенству (1.10), то ядра операторов R_{ij} также удовлетворяют неравенству (1.10). Таким образом, полученная система сингулярных интегральных уравнений (1.21) со слабой особенностью, решение которой можно найти методом последовательных приближений. Причем при выполнении условия, налагаемые на данные краевой задачи (1.1) – (1.4), найденные решения системы (1.21) являются непрерывными функциями. В итоге получена следующая

Теорема 6. Если коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют условиям (1.5), а заданные функции удовлетворяют условиям (1.6) – (1.7) и выполнено условие разрешимости (1.19), то краевая задача (1.1) – (1.4) имеет, решение которое представимо в виде (1.8), где неизвестные функции $\sigma_i(x^{(i)},t)$, определяются из системы интегральных уравнений (1.21).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фридман А* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. С. 427.
2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А. Уральева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
3. *Орынбасаров М.* О разрешимости краевых задач для параболического и полипараболического уравнений в нецилиндрической области с негладкими боковыми границами // Дифференциальное уравнение. Т. 30, № 1. 1994. С. 61-71.
4. *Орынбасаров М.* Построение фундаментального решения одного выраждающегося параболического уравнения и дифференцируемость Ф. Р. // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. 2007. №1. С. 19-27.

Резюме

Параболалық потенциалдар және сингулярлы интегралдық теңдеулер әдісімен шекарасы тегіс емес облыста айнымалы коэффициентті ерекшеленген параболалық теңдеу үшін шекаралық есептің регулярлы шешімінің бар болуы дәлелденген.

Summary

In given clause methods of parabolic potentials and sanguinary the integrated equations prove existence regular the decision of a regional task for the degenerating parabolic equation with variable factors in not cylindrical area with rough border.

КазНУ им. аль-Фараби

Поступила 28.09.07г.