УДК531.31;519.21

М. И. ТЛЕУБЕРГЕНОВ, Г. Т. ИБРАЕВА

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ЗАМЫКАНИЯ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка со случайными возмущениями из класса винеровских процессов, с вырождающейся относительно части переменных диффузией и с заданными свойствами, зависящими от части переменных.

Введение. Основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем разработаны в [1-3] и др. для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Так, в работе Н. П. Еругина [1] строится множество ОДУ, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ. В [2,3] изложены постановка, классификация обратных задач дифференциальных систем и их решение в классе ОДУ. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ предложен в [3].

В [4] рассматривается одна из обратных задач динамики - задача построения множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка по заданной системе уравнений и заданному интегральному многообразию в предположении, что 1) замыкающие уравнения являются уравнениями с вырождающейся диффузией; 2) заданное интегральное многообразие зависит от всех переменных.

В данной работе в отличии от [4] предполагается, что заданное интегральное многообразие зависит лишь от части переменных.

1. Постановка общей задачи. Пусть заданы множество

$$\Lambda(t):\ \lambda(y,t)=0,$$

$$\text{где } \lambda=\lambda(y,t)\in C^{11}_{y\,t},\quad \lambda\in R^m \tag{1.1}$$

и стохастическое дифференциальное уравнений Ито первого порядка

$$\dot{y}=g_1(y,v,w,t). \tag{1.2}$$

Требуется достроить систему замыкающих уравнений вида

$$\begin{cases}\dot{v}=g_2(y,v,w,t),\\ \dot{w}=g_3(y,v,w,t)+\sigma(y,v,w,t)\dot{\xi},\end{cases} \tag{1.3}$$

так, чтобы множество (1.1) было интегральным многообразием системы уравнений (1.2), (1.3). Здесь $y\in R^{l_1}$, $v\in R^{p_1}$, $w\in R^{p_2}$, $l_1+p_1+p_2=n$, σ - матрица $(p\times k)$, $\{\xi_1(t,w),\dots,\xi_k(t,w)\}$ - система независимых винеровских процессов [5], заданная на (Ω,U,P) - некотором вероятностном пространстве. Искомые для решения поставленной задачи вектор-функции g_1,g_2,g_3 и матрица σ предполагаются из класса ***K*** – непрерывных по t и липшицевых по y,v и w в окрестности множества $\Lambda(t)$.

$$U_h(\Lambda)=\left\{y=(y^T,v^T,w^T)^T:\rho(y,\Lambda(t))<h,h>0\right\}. \tag{1.4}$$

В настоящей работе для решения стохастической задачи замыкания используется метод квазиобращения [3, с. 12].

Предварительно, для решения поставленной задачи по правилу стохастического дифференцирования Ито [5, с.204] сложной функции в случае винеровского процесса последовательно вычислим $\dot{\lambda}$, а затем $\ddot{\lambda}$

$$\dot{\lambda}=\frac{\partial\lambda}{\partial t}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}g_1,$$

$$\ddot{\lambda}=\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}+g_1^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}g_1+\left(2\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)g_1+$$

$$+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial v}g_2+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial w}g_3+$$

$$+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial w}\sigma\dot{\xi}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}S_1+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial t}, \tag{1.5}$$

где $S_1=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_1}{\partial w^2}:\sigma\sigma^T$, $g=\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}+g_1^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}g_1+$

$$+\left(2\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)g_1+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial t}.$$

А под $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_1}{\partial w^2}:D_1$, следуя [5], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(y,v,w,t)$ вектора $\lambda(y,v,w,t)$ по компонентам w на матрицы D_1, где $D_1=\sigma_1\sigma_1^T$.

Далее, введем произвольные функции Еругина [1]: m-мерную вектор-функцию A и $(m\times k)$-матрицу B, обладающие свойством $A(0,0,y,v,w,t)\equiv 0$, $B(0,0,y,v,w,t)\equiv 0$, такие, что имеет место

$$\ddot{\lambda}=A(\lambda,\dot{\lambda},y,v,w,t)+B(\lambda,\dot{\lambda},y,v,w,t)\dot{\xi}, \tag{1.6}$$

где ξ - тот же независимый винеровский процесс, входящий в (1.3).

На основе уравнений (1.5) и (1.6) приходим к соотношениям

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial v}\right)g_2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial w}\right)g_3=A-\left(g+\frac{\partial\lambda}{\partial y}S_1\right),\\ \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial w}\right)\sigma=B,\end{cases} \tag{1.7}$$

из которых нужно определить вектор-функции управления g_2, g_3 и матрицу σ.

Для разрешения задачи потребуется

Лемма 1[3, с.12-13]. *Совокупность всех решений линейной системы*

$$H\vartheta = g, \quad H = (h_{\mu k}), \quad \vartheta = (\vartheta_k), \quad g = (g_\mu),$$

$$\mu = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,n}, \quad m \le n, \qquad (1.8)$$

где матрица H имеет ранг равный m, определяется выражением

$$\vartheta = s[HC] + H^+ g. \qquad (1.9)$$

Здесь s - произвольная скалярная величина, $[HC] = [h_1 \dots h_m \; c_{m+1} \dots c_{n-1}]$ *есть векторное произведение векторов* $h_\mu = (h_{\mu k})$ *и произвольных векторов* $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; $H^+ = H^T (HH^T)^{-1}$, H^T *- матрица, транспонированная к H.*

Положим $g_2 = \eta(y, v, w, t)$, где η - произвольная функция из класса $\boldsymbol{K}$.

Тогда выражение (1.7) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial y}\dfrac{\partial g_1}{\partial w} g_3 = A - \left(g + \dfrac{\partial \lambda}{\partial y} S_1 + \dfrac{\partial \lambda}{\partial y}\dfrac{\partial g_1}{\partial v}\eta \right), \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial y}\dfrac{\partial g_1}{\partial w}\sigma = B. \end{cases} \qquad (1.10)$$

Обозначив $b_1 = A - \left(g + \dfrac{\partial \lambda}{\partial y} S_1 + \dfrac{\partial \lambda}{\partial y}\dfrac{\partial g_1}{\partial v}\eta \right)$,

по формуле (1.9) леммы 1 из соотношений (1.10) определим искомые вектор-функцию g_3 и матрицу σ в виде:

$$g_3 = s_1 \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial w} \right) C \right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial w} \right)^+ b_1, \quad (1.11)$$

$$\sigma_i = s_2 \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial w} \right) C \right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial w} \right)^+ B_i. \quad (1.12)$$

где σ_i - i-ый столбец матрицы $\sigma = (\sigma_{vj})$, $(v = \overline{1 \dots n}, j = \overline{1 \dots k})$, B_i- i-ый столбец матрицы $B = (B_{\mu l})$.

Следовательно, справедлива теорема:

Теорема 1. *Для того чтобы дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито (1.2) имело заданное интегральное многообразие (1.1) необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты замыкающих стохастических дифференциальных уравнений* g_2, g_3 *имели вид (1.11), а матрица диффузий* σ *удовлетворяла условию (1.12).*

2. Линейный случай общей задачи замыкания. По заданному линейному множеству

$$\Lambda(t): \lambda \equiv H_1(t) y + h(t) = 0 \qquad (2.1)$$

и системе стохастических дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y} = \Phi_1(t) y + \Phi_2(t) v + \Phi_3(t) w + \varphi_1(t) \quad (2.2)$$

требуется достроить линейную стохастическую систему уравнений первого порядка с вырождающейся по части переменных диффузий вида

$$\begin{cases} \dot{v} = G_1(t) y + G_2(t) v + G_3(t) w + \varphi_2(t) \\ \dot{w} = U_1(t) y + U_2(t) v + U_3(t) w + \varphi_3(t) + T(t)\dot{\xi} \end{cases} \qquad (2.3)$$

так, чтобы заданное множество являлось интегральным многообразием. Иначе говоря, по заданным матрицам $H_1(t), H_2(t), \Phi_1(t), \Phi_2(t), \Phi_3(t)$ и функциям $h(t), \varphi_1(t)$ требуется определить матрицы $G_1(t), G_2(t), G_3(t), U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$, и вектор-функции $\varphi_2(t), \varphi_3(t)$, а также матрицу $T(t)$ так, чтобы для системы (2.2), (2.3) заданные свойства (2.1) являлись интегральным многообразием.

В рассматриваемой задаче уравнение возмущенного движения (1.6) имеет вид

$$\ddot{\lambda} = M_1 y + M_2 v + M_3 w + M_4 + + H_1(t)\Phi_3(t) T(t)\dot{\xi}, \qquad (2.4)$$

где

$$M_1 = \ddot{H}_1(t) + 2\dot{H}_1(t)\Phi_1(t) + H_1(t)\dot{\Phi}_1(t) + + H_1(t)\Phi_1^2(t) + H_1(t)\Phi_2(t) G_1(t),$$

$$M_2 = 2\dot{H}_1(t)\Phi_2(t) + H_1(t)\Phi_1(t)\Phi_2(t) + + H_1(t)\Phi_2(t) + H_1(t)\Phi_2(t) G_2(t),$$

$$M_3 = 2\dot{H}_1(t)\Phi_3(t) + H_1(t)\Phi_1(t)\Phi_3(t) + + H_1(t)\dot{\Phi}_3(t) + H_1(t)\Phi_2(t)) G_3(t),$$

$$M_4 = \ddot{h}(t) + 2\dot{H}_1(t)\varphi_1(t) + H_1(t)\Phi_1(t)\varphi_1(t) + + H_1(t)\dot{\varphi}_1(t) + H_1(t)\Phi_2(t))\varphi_2(t),$$

а, с другой стороны, с помощью произвольной вектор-функции Еругина $A = A_1(t)\lambda + A_2(t)\dot{\lambda}$ и матрицы B со свойством $B(0,0,y,v,w,t) \equiv 0$ имеем

$$\ddot{\lambda} = A_1(t)\lambda + A_2(t)\dot{\lambda} + B\dot{\xi} \ . \qquad (2.5)$$

И подставляя в (2.5) выражения λ и $\dot{\lambda}$ получим

$$\ddot{\lambda} = y\big(A_1(t)H_1(t) + A_2(t)\dot{H}_1(t) + A_2(t)H_1(t)\Phi_1(t)\big) + A_2(t)H_1(t)\Phi_2(t)v + A_2(t)H_1(t)\Phi_3(t)w + \big(A_1(t)h(t) + A_2(t)\dot{h}(t) + A_2(t)H_1(t)\varphi_1(t)\big) + B\dot{\xi} \ . \qquad (2.6)$$

Тогда из соотношений (2.4) и (2.6) следует равенство

$$\big(A_1(t)H_1(t) + A_2(t)\dot{H}_1(t) + A_2(t)H_1(t)\Phi_1(t)\big)y + A_2(t)H_1(t)\Phi_2(t)v + A_2(t)H_1(t)\Phi_3(t)w + \big(A_1(t)h(t) + A_2(t)\dot{h}(t) + A_2(t)H_1(t)\varphi_1(t)\big) + B\dot{\xi} = M_1 y + M_2 v + M_3 w + M_4 + H_1(t)\Phi_3(t)T(t)\dot{\xi} \ . \qquad (2.7)$$

Пусть $G_1(t), G_2(t), G_3(t)$ – произвольно заданные непрерывные матрицы соответственно порядка $(p_1 \times l_1), (p_1 \times p_1), (p_1 \times p_2)$, а $\varphi_2(t)$ – произвольно заданная непрерывная вектор-функция, тогда равенство (2.7) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} L_1 U_1(t) = \widetilde{M}_1, \\ L_1 U_2(t) = \widetilde{M}_2, \\ L_1 U_3(t) = \widetilde{M}_3, \\ L_1 \varphi_3(t) = \widetilde{M}_4, \\ L_1 T(t) = B, \end{cases} \qquad (2.8)$$

где $L_1(t) = H_1(t)\Phi_3(t)$, $\widetilde{M}_1 = A_1(t)H_1(t) + A_2(t)\dot{H}_1(t) + A_2(t)H_1(t)\Phi_1(t) - M_1$,

$\widetilde{M}_2 = A_2(t)H_1(t)\Phi_2(t) - M_2$,

$\widetilde{M}_3 = A_2(t)H_1(t)\Phi_3(t) - M_3$,

$\widetilde{M}_4 = A_1(t)h(t) + A_2(t)\dot{h}(t) + A_2(t)H_1(t)\varphi_1(t) - M_4$.

И далее по лемме 1 совокупность всех решений системы уравнений (2.2), (2.3) на основании (2.8) примет вид:

$$\begin{cases} U_1(t) = s_1[L_1 C] + [L_1]^+ \widetilde{M}_1, \\ U_2(t) = s_2[L_1 C] + [L_1]^+ \widetilde{M}_2, \\ U_3(t) = s_3[L_1 C] + [L_1]^+ \widetilde{M}_3, \\ \varphi_3(t) = s_4[L_1 C] + [L_1]^+ \widetilde{M}_4, \\ T_i(t) = s_5[L_1 C] + [L_1]^+ B_i \ , \end{cases} \qquad (2.9)$$

где через T_i, B_i обозначены i-ые столбцы матриц T и B. Здесь s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 - произвольные скалярные величины. Тем самым доказана

Теорема 2. *Для того чтобы система дифференциальных уравнений первого порядка типа Ито (2.2),(2.3) имела заданное интегральное многообразие (2.1) необходимо и достаточно, чтобы при произвольных непрерывных матрицах $G_1(t), G_2(t), G_3(t)$ и произвольной непрерывной вектор-функции $\varphi_2(t)$ коэффициенты $U_1(t)$, $U_2(t), U_3(t), \varphi_3(t)$ замыкающих стохастических дифференциальных уравнений (2.3) и матрица диффузий $T(t)$ удовлетворяли условию (2.9).*

3. Скалярный случай задачи замыкания. По заданной скалярной функции

$$\kappa(y,t) = 0, \quad \kappa \in R^1 \qquad (3.1)$$

и стохастическому дифференциальному уравнению

$$\dot{y} = \alpha_1(y,v,w,t), y \in R^1 \qquad (3.2)$$

требуется достроить замыкающую систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{v} = \alpha_2(y,v,w,t) \ , \ v \in R^1 \\ \dot{w} = \alpha_3(y,v,w,t) + \beta(y,v,w,t)\dot{\gamma}, \ w \in R^1, \end{cases} \qquad (3.3)$$

где $\gamma = \gamma(t,\omega)$ - скалярный винеровский процесс [5], так, чтобы множество (3.1) было интегральным многообразием системы уравнений (3.2), (3.3). Задача заключается в определении функций α_2, α_3 и β по заданной функции α_1 и заданному интегральному многообразию $\kappa(y,t) = 0$.

Дифференцируя сложную функцию $\kappa(y,t)$ по правилу стохастического дифференцирования Ито [5] в случае винеровского процесса имеем

$$\dot{\kappa} = \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial \kappa}{\partial y}\dot{y}, \qquad (3.5)$$

$$\ddot{\kappa} = \tau + \frac{\partial \kappa}{\partial y}\frac{\partial \alpha_1}{\partial v}\alpha_2 + \frac{\partial \kappa}{\partial y}\frac{\partial \alpha_1}{\partial w}\alpha_3 + \frac{\partial \kappa}{\partial y}\widetilde{S}_1 + \frac{\partial \kappa}{\partial y}\frac{\partial \alpha_1}{\partial w}\beta\dot{\gamma},$$

где $\widetilde{S}_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \alpha_1}{\partial w^2}\gamma^2$, $\tau = \dfrac{\partial^2 \kappa}{\partial t^2} + \left(2\dfrac{\partial^2 \kappa}{\partial t \partial y} + \dfrac{\partial \kappa}{\partial y}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 \kappa}{\partial y^2}\right)\alpha_1 + \dfrac{\partial \kappa}{\partial y}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \dfrac{\partial \kappa}{\partial y}s_1$.

Введем произвольные скалярные функции $a = a(\kappa, \dot\kappa, y, v, w, t)$ и $b = b(\kappa, \dot\kappa, y, v, w, t)$, обладающие свойством $a(0,0, y, v, w, t) \equiv b(0,0, y, v, w, t) = 0$, такие, что имеет место

$$\ddot\kappa = a + b\dot\gamma . \qquad (3.6)$$

Далее, исходя из уравнений (3.5) и (3.6) приходим к соотношениям

$$\frac{\partial\kappa}{\partial y}\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}\alpha_2 + \frac{\partial\kappa}{\partial y}\frac{\partial\alpha_1}{\partial w}\alpha_3 = a - \left(\tau + \frac{\partial\kappa}{\partial y}\tilde{S}_1\right), \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial\kappa}{\partial y}\frac{\partial\alpha_1}{\partial w}\beta = b. \qquad (3.8)$$

Предположим, что $\alpha_2 \in \boldsymbol{K}$, тогда скалярные функции α_3 и β в силу равенств (3.7) и (3.8) определим в виде

$$\alpha_3 = \left(\frac{\partial\kappa}{\partial y}\frac{\partial\alpha_1}{\partial w}\right)^{-1} a - \left(\tau + \frac{\partial\kappa}{\partial y}\tilde{S}_1 + \frac{\partial\kappa}{\partial y}\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}\alpha_2\right), \quad (3.9)$$

$$\beta = \left(\frac{\partial\kappa}{\partial y}\frac{\partial\alpha_1}{\partial w}\right)^{-1} b . \qquad (3.10)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Для того чтобы скалярное дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито (3.1) имело заданное скалярное интегральное многообразие (3.2) необходимо и достаточно, чтобы при произвольной непрерывной функции $\alpha_2 \in \boldsymbol{K}$ скалярные функции α_3 и β имели соответственно вид (3.9) и (3.10).*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную инте-гральную кривую // ПММ. 1952. Т. 10, вып. 16. С. 659-670.

2. *Галиуллин А.С.* Методы решения обратных задач динамики. М., 1986. 224 с.

3. *Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г.* Уравнения программных движений. М., 1986. 88 с.

4. *Тлеубергенов М.И.* Ибраева Г.Т. Об обратной задаче замыкания дифференциальных систем с вырождающейся по части переменных диффузией // Математический журнал 2005. Т. 5, № 2(16). С. 79-86.

5. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 632 с.

Резюме

Айнымалының бөлігінен тәуелді диффузиясы бөлігіне қарасты азғындалатын және берілген қасиеттері бар Винер үрдістері класында кездейсоқ түрткілі бірінші ретті Ито стохастикалық дифференциалдық теңдеулердің класында тұйықтау есебінің шешілімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды.

Summary

The necessary and sufficient conditions of solvability of circuit's problem into the class of stochastic differential Ito equations of first order with random disturbances from the class of Wiener processes, with a diffusion degenerating with respect to the part of variables and with given properties depending from the part of variables are received.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 1.10.07г.