

## О ПОСТРОЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО ЗАДАНЫМ СВОЙСТВАМ ДВИЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Строятся уравнения Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения в классе стохастических дифференциальных уравнений типа Ито. При этом случайные возмущающие силы предполагаются из класса винеровских процессов. Полученные результаты иллюстрируются на примере движения искусственного спутника Земли под действием сил тяготения и аэродинамических сил.

По заданному множеству

$$\Lambda(t) : \lambda(x, \dot{x}, t) = 0, \quad \lambda \in R^m, \quad x \in R^n \quad (1)$$

требуется построить стохастические уравнения лагранжевой, гамильтоновой и биркгофиановой структуры

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_v} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_v} = \sigma'_{vj}(x, \dot{x}, t) \xi^j, \quad (v = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, r}) \quad (2)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + \sigma'_{kj}(q, p, t) \xi^j; \end{cases} \quad (k = \overline{1, n}) \quad (3)$$

$$\left[ \frac{\partial R_l(z, t)}{\partial z_l} - \frac{\partial R_l(z, t)}{\partial z_l} \right] \dot{z}_i - \left[ \frac{\partial B(z, t)}{\partial z_l} + \frac{\partial R_l(z, t)}{\partial t} \right] = T_{i\mu} \psi_\mu \quad (i, l = \overline{1, 2n}, \mu = \overline{1, n+m}) \quad (4)$$

так, чтобы множество  $\Lambda(t)$  было интегральным многообразием построенных уравнений. Здесь  $B=B(z, t)$  - функция Биркгофа, а  $W=(W_{il})$  - тензор Биркгофа с компонентами

$$W_{il} = \left[ \frac{\partial R_l(z, t)}{\partial z_l} - \frac{\partial R_l(z, t)}{\partial z_l} \right].$$

Поставленная задача в классе обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривалась в [1]. В [2] рассмотрены задачи построения по заданному стохастическому уравнению Ито второго порядка эквивалентного стохастического уравнения лагранжевой, гамильтоновой и биркгофиановой структуры.

В данной работе рассматриваются задачи построения функции Лагранжа, Гамильтона и

Биркгофа по заданным свойствам движения при наличии случайных возмущений.

Для решения поставленных задач на первом этапе по заданному множеству методом квазиобращения [3] в сочетании с методом Еругина [4] и в силу стохастического дифференцирования сложной функции [5] строится уравнение Ито

$$\dot{x} = f(x, \dot{x}, t) + \sigma(x, \dot{x}, t) \xi \quad (5)$$

так, чтобы множество  $\Lambda(t)$  являлось интегральным многообразием по-строенного уравнения.

И, далее, по построенному уравнению Ито строятся эквивалентные ему уравнения лагранжевой, гамильтоновой и биркгофиановой структуры.

**1. Построение стохастической уравнения лагранжевой структуры (2) по заданным свойствам движения (1).** Предварительно, по правилу стохастического дифференцирования Ито составляется уравнение возмущенного движения

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} f + S + \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} \sigma \xi, \quad (6)$$

где  $S = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \dot{x}^2} : \sigma \sigma^T$ ; а под  $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \dot{x}^2} : D$ ,  $D = \sigma \sigma^T$ , следуя [5], понимается век-тор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов  $\lambda_\mu(x, \dot{x}, t)$  вектора  $\lambda(x, \dot{x}, t)$  по компонентам  $\dot{x}$  на матрицу  $D$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \dot{x}^2} : D = \begin{bmatrix} \text{tr} \left( \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \dot{x}^2} D \right) \\ \vdots \\ \text{tr} \left( \frac{\partial^2 \lambda_m}{\partial \dot{x}^2} D \right) \end{bmatrix}$$

и вводятся произвольные функции Еругина [4]  $A$  и  $B$ , обладающие свойствами  $A(0, x, \dot{x}, t) \equiv 0$ ,  $B(0, x, \dot{x}, t) \equiv 0$ ,

$$\dot{\lambda} = A(\lambda, x, \dot{x}, t) + B(\lambda, x, \dot{x}, t)\dot{\xi}. \quad (7)$$

Сравнивая уравнения (6) и (7) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} f = A - \frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \dot{x} - S, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} \sigma = B, \end{cases} \quad (8)$$

из которых методом квазиобращения [3, с. 12] определим вектор-функцию  $f$  и матрицу  $\sigma$

$$f = s_1 \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} C \right] + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} \right)^+ \left( A - \frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \dot{x} - S \right), \quad (9)$$

$$\sigma_i = s_2 \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} C \right] + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} \right)^+ B_i, \quad (10)$$

где  $\sigma_i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \dots, \sigma_{ni})^T$  -  $i$ -ый столбец матрицы  $\sigma = (\sigma_{vj})$ ,  $(v = \overline{1, n}, j = \overline{1, r})$ ,  $B_i = (B_{1i}, B_{2i}, \dots, B_{mi})^T$  -  $i$ -ый столбец матрицы  $B = (B_{\mu j})$ ,  $(\mu = \overline{1, m}, j = \overline{1, r})$ ,  $s_1, s_2$  - произвольные скалярные величины.

Следовательно, из (9), (10) следует, что множество дифференциальных уравнений Ито второго порядка, обладающее заданной интегральной кривой (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & s_1 \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} C \right] + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} \right)^+ \left( A - \frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \dot{x} - S \right) + \\ & + \left( s_2 \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} C \right] + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} \right)^+ B_i \right) \dot{\xi}. \end{aligned}$$

Далее, по правилу стохастического дифференцирования Ито раскроем выражение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_v} \right) = & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_v \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_v \partial x_k} \dot{x}_k + \\ & + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_v \partial \dot{x}_k} \dot{x}_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{x}_v \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \sigma_{ij} \sigma_{kj}. \end{aligned} \quad (11)$$

Следовательно, уравнение (2) с учетом (11) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_v} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_v} - \sigma'_{vj}(x, \dot{x}, t) \dot{\xi}^j = & \\ = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_v \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_v \partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_v \partial \dot{x}_k} \dot{x}_k + & \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{x}_v \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \sigma_{ij} \sigma_{kj} - \frac{\partial L}{\partial x_v} - \sigma'_{vj}(x, \dot{x}, t) \dot{\xi}^j. \end{aligned} \quad (12)$$

Или, учитывая (12) и уравнение (5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_v \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_v \partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_v \partial \dot{x}_k} \dot{x}_k + & \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{x}_v \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \sigma_{ij} \sigma_{kj} - \frac{\partial L}{\partial x_v} - \sigma'_{vj}(x, \dot{x}, t) \dot{\xi}^j = & \\ \equiv \ddot{x} - f(x, \dot{x}, t) + \sigma(x, \dot{x}, t) \dot{\xi}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из соотношения (13) следуют равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_v \partial \dot{x}_k} = \delta_v^k; & \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_v \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_v \partial x_k} \dot{x}_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{x}_v \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \sigma_{ij} \sigma_{kj} - \frac{\partial L}{\partial x_v} = f, & \\ \sigma'_{vj}(x, \dot{x}, t) = \sigma. & \end{aligned} \quad (14)$$

Тем самым доказана

**Теорема 1.** Для построения стохастического уравнения лагранжевой структуры (2) по заданному множеству (1) так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием построенного уравнения необходимо и достаточно выполнения условий (14).

**2. Построение стохастического уравнения гамильтоновой структуры (3) по заданным свойствам движения (1).** Для построения функции Гамильтона предварительно введем новую переменную  $y_k = \dot{x}_k$  и перепишем заданное уравнение (5) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_k = y_k, \\ y_k = f_k(x, y, t) + \sigma_{kj}(x, y, t) \dot{\xi}^j, \end{cases} \quad (15)$$

где  $f = s_1 \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} C \right] + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} \right)^+ \left( A - \frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \dot{x} - S \right)$ ,

$$\sigma_i = s_2 \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} C \right] + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} \right)^+ B_i.$$

Затем с помощью замен

$$z_k = \begin{cases} x_k, \\ y_k \end{cases}; G_k = \begin{cases} y_k, \\ f_k \end{cases};$$

$$\psi_j = \begin{cases} 0, & \text{при } j = \overline{1, n}; \\ \xi^{j-n}, & \text{при } j = n+1, n+2, \dots, n+m; \end{cases};$$

$$\mu = (\mu_{kj}) = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times m} \\ 0_{n \times n} & \sigma_{n \times m} \end{pmatrix}; \sigma = (\sigma_{kj}) \text{ перепишем}$$

уравнение (15) в виде

$$\dot{z}_k = G_k(z, t) + \mu_{kj}(z, t)\dot{\psi}_j. \quad (16)$$

Далее стохастическое уравнение гамильтоновой структуры (3) с помощью замены

$$v_k = \begin{cases} q_k, & k = \overline{1, n} \\ p_{k-n}, & k = n+1, n+2, \dots, 2n \end{cases} \text{ и матриц}$$

$$\varphi = (\varphi_{kv}) = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix}, p = (p_{kj}) = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times m} \\ 0_{n \times n} & \sigma'_{n \times m} \end{pmatrix},$$

а также с учетом того, что 
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{kv} & \frac{\partial H}{\partial v_v} \end{pmatrix}$$

перепишем в виде

$$\dot{v}_k - \varphi_{kv} \frac{\partial H}{\partial v_v} = p_{kj} \dot{\psi}_j \quad (17)$$

или, если ввести обратную к  $(\varphi_{kv})$  матрицу

$$(\omega_{kv}) = (\varphi_{kv})^{-1} = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix}$$

и вектор

$$z_k \equiv \omega_{kv} v_v = \begin{pmatrix} -p_k, & k = \overline{1, n} \\ q_{k-n}, & k = n+1, 2n \end{pmatrix},$$

то уравнение (17) преобразуется к эквивалентному уравнению

$$\omega_{vk} \dot{z}_k - \frac{\partial H}{\partial z_k} = \omega_{vk} p_{vj} \dot{\psi}_j. \quad (18)$$

Рассмотрим задачу непрямого представления уравнения (16) в виде уравнения гамильтоновой структуры (18), т.е. с помощью некоторой матрицы  $\Gamma = (\gamma_v^k)$  рассмотрим соотношение

$$\gamma_v^k (\dot{z}_k - G_k - \mu_{kj} \dot{\psi}_j) \equiv \omega_{vk} \dot{z}_k - \frac{\partial H}{\partial z_v} - \omega_{vk} p_{vj} \dot{\psi}_j$$

или

$$C_{vk} \dot{z}_k - D_v(z, t) - \gamma_v^k \mu_{kj} \dot{\psi}_j \equiv \omega_{vk} \dot{z}_k - \frac{\partial H}{\partial z_v} - \omega_{vk} p_{vj} \dot{\psi}_j, \quad (19)$$

где  $C_{vk} = \gamma_v^k$ ;  $D_v(z, t) = \gamma_v^k G_k$ .

Для выполнения тождества (19) требуется выполнение условий

$$C_{vk} = \omega_{vk}, \quad D_v(z, t) = -\frac{\partial H}{\partial z_v}, \quad (20)$$

$$\gamma_v^k \mu_{kj} = \omega_{vk} p_{vj} \quad (v, k = \overline{1, 2n}, j = \overline{1, n+m}), \quad (21)$$

$$\gamma_v^k = \omega_{vk}. \quad (22)$$

Из соотношений (19) и условий (20)-(22) следует, что  $\mu_{kj} = p_{vj}$ , а это влечет выполнение равенства

$$\sigma_{kj} = \sigma'_{kj}, \quad (k = \overline{1, n}, j = \overline{1, m})$$

Следовательно справедлива

**Теорема 2.** Для непрямого построения стохастического уравнения гамильтоновой структуры (3) по заданному множеству (1) так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием уравнения (18) необходимо и достаточно выполнение условий (20)-(22).

**3. Построение стохастической уравнения биркгофиановой структуры (4) по заданным свойствам движения (1).** Для решения поставленной задачи рассмотрим соотношение

$$C_{vk} \dot{z}_k - D_v(z, t) - \mu_{vj} \dot{\psi}_j \equiv \left[ \frac{\partial R_k(z, t)}{\partial z_v} - \frac{\partial R_v(z, t)}{\partial z_k} \right] \dot{z}_k - \left[ \frac{\partial B(z, t)}{\partial z_v} + \frac{\partial R_v(z, t)}{\partial t} \right] - T_{vj} \dot{\psi}_j, \quad (23)$$

$(v, k = \overline{1, 2n}, j = \overline{1, n+m})$ , которое выполняется тождественно при следующих условиях:

$$C_{vk} = \left[ \frac{\partial R_k(z, t)}{\partial z_v} - \frac{\partial R_v(z, t)}{\partial z_k} \right],$$

$$D_v = \left[ \frac{\partial B(z, t)}{\partial z_v} + \frac{\partial R_v(z, t)}{\partial t} \right], \quad \mu = T. \quad (24)$$

Следовательно, имеет место

**Теорема 3.** Для построения стохастического уравнения биркгофиановой структуры (4) по заданному множеству (1), так чтобы множество (1) было интегральным многообразием уравнения (4) необходимо и достаточно выполнение условий (24).

**4. Пример.** Рассмотрим построение функций Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданному свойству движения:

$$\Delta(t): \lambda = \alpha_1 \theta + \alpha_2 \dot{\theta} + \alpha_3, \quad \lambda \in R^1.$$

Тогда соотношение (6) имеет вид

$$\dot{\lambda} = \alpha_1 \dot{\theta} + \alpha_2 f + \alpha_2 \sigma \dot{\xi}. \quad (25)$$

Введем функции Н. П. Еругина  $a = a(\lambda, \theta, \dot{\theta}, t)$ ,  $b = b(\lambda, \theta, \dot{\theta}, t)$  такие, что  $a(0, \theta, \dot{\theta}, t) = b(0, \theta, \dot{\theta}, t) \equiv 0$ , имеем

$$\dot{\lambda} = a\lambda(\theta, \dot{\theta}, t) + b\lambda(\theta, \dot{\theta}, t)\dot{\xi}. \quad (26)$$

Из соотношений (25), (26) следует, что

$$\begin{aligned} f &= (a\lambda(\theta, \dot{\theta}, t) - \alpha_1 \dot{\theta})\alpha_2^{-1}, \\ \sigma &= b\lambda(\theta, \dot{\theta}, t)\alpha_2^{-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда уравнение (7) примет вид  $\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta}, t) + \sigma(\theta, \dot{\theta}, t)\dot{\xi}$ .

Для построения функции Гамильтона предварительно построим лагранжиан по следующему уравнению [6]

$$\ddot{\theta} = \tilde{f}(\theta, \dot{\theta}) + \tilde{\sigma}(\theta, \dot{\theta})\dot{\xi}, \quad (28)$$

где  $\theta$  – угол тангажа, а функции  $\tilde{f}$  и  $\tilde{\sigma}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= Ql \sin 2\theta - Q[g(\theta) + \eta\dot{\theta}], \\ \tilde{\sigma} &= Q\delta[g(\theta) + \eta\dot{\theta}]. \end{aligned} \quad (29)$$

Из соотношений (27), (29) с учетом того, что

$f = \tilde{f}$ ,  $\sigma = \tilde{\sigma}$  имеем

$$\begin{aligned} (a\lambda(\theta, \dot{\theta}, t) - \alpha_1 \dot{\theta})\alpha_2^{-1} &= Ql \sin 2\theta - Q[g(\theta) + \eta\dot{\theta}], \\ b\lambda(\theta, \dot{\theta}, t)\alpha_2^{-1} &= Q\delta[g(\theta) + \eta\dot{\theta}] \end{aligned}$$

и приравнивая коэффициенты при  $\dot{\theta}$ ,  $\theta$  находим  $Q$ ,  $\eta$ ,  $\delta$ :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{a\alpha_1}{(2l-g)\alpha_2}, \quad \eta = -\frac{(a\alpha_2 - \alpha_1)(2l-g)}{a\alpha_1}, \\ \delta &= -\frac{b\alpha_2}{a\alpha_2 - \alpha_1}. \end{aligned}$$

Тогда по определению из [7] следует, что (28) допускает аналитическое представление в терминах стохастического уравнения лагранжевой структуры, если существует функция  $h$ , такая что имеет место тождество

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} - \sigma'(\theta, \dot{\theta}, t)\dot{\xi} \equiv h[\ddot{\theta} - f - \sigma\dot{\xi}]. \quad (30)$$

Найдем функцию  $h = h(t)$  так, чтобы выполнялись необходимые и достаточные условия Гельмгольца [7] существования лагранжиана

$$\frac{\partial b}{\partial a} = \frac{\partial a}{\partial t} + \dot{\theta} \frac{\partial a}{\partial \theta}.$$

Этому условию удовлетворяет функция  $h$  вида  $h = e^{-Q\eta t}$ . Подставляя найденное  $h$  в (30) получим

$$e^{-Q\eta t} [\ddot{\theta} - f - \sigma\dot{\xi}] = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^2} \ddot{\theta} + \frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} \sigma' \dot{\xi}.$$

Таким образом, искомый лагранжиан строится в виде

$$\begin{aligned} L &= e^{-Q\eta t} \left[ \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - Q \left( \frac{1}{2} l \cos 2\theta + G \right) \right], \\ \text{где } G &= \int g(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (31)$$

который обеспечивает представление (28) в виде уравнения лагранжевой структуры

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = e^{-Q\eta t} \sigma(\theta, \dot{\theta}) \dot{\xi}. \quad (32)$$

Используя функцию Лагранжа (31) и преобразование Лежандра, определим функцию Гамильтона в виде  $H = \chi \dot{\theta} - L(\theta, \dot{\theta}, t) \Big|_{\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta, \chi, t)}$ . И так как

$\chi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ , то  $\chi = e^{-Q\eta t} \dot{\theta}$  и, следовательно,

$\dot{\theta} = e^{Q\eta t} \chi$ . Тогда каноническое уравнение, соответствующее уравнению (32), примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial \chi}, \\ \dot{\chi} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} + \tilde{\sigma}(\theta, \chi, t)\dot{\xi}, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $\bar{\sigma} = \sigma'(\theta, \dot{\theta}, t) \Big|_{\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta, \chi, t)}$ , а функция Гамильтона определяется в виде

$$H = \frac{1}{2} e^{Q\eta} \chi^2 e^{-Q\eta} b(\theta). \quad (34)$$

Для разрешения задачи представления биркгофиана по заданному уравнению (28) воспользуемся теоремой 1 [8]. По построенному выше уравнению (33) и функции Гамильтона (34) из

соотношений (23) при  $C = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}$  функции

$R_v$  ( $v = 1, 2$ ) и  $B$  определяются в следующем виде

$$R_v = \{\chi, (1 + \phi)\theta\}, B = \frac{1}{2} \phi e^{Q\eta} \chi^2 - \phi e^{-Q\eta} b(\theta),$$

где  $\phi$  - произвольная постоянная.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Туладхар Б.М. Построение уравнений в форме Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения: Автореф. на соиск. ... к. ф.-м. н. М.: УДН им. П. Лумумбы, 1983. 11 с.
2. Тлеубергенов М.И. Обратные задачи стохастических дифференциальных систем: Автореф. на соиск. ... д. ф.-м. н. Алматы, 1999. 33 с.
3. Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. М., 1986. 88 с.
4. Ерузин Н.П. Построение всего множества систем

дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ИПМ 1952. Т. 10, вып. 16. С. 659-670.

5. Пугачев В.С., Ситицкий И.Н. Стохастические дифференциальные системы // Анализ и фильтрация. М., 1990. 632 с.

6. Сагиров П. Стохастические методы в динамике спутников // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. М., 1974. № 5(147). С. 28-47; 1974. № 6(148). С. 3-38.

7. Santilli R.M. Foundations of Theoretical Mechanics. 1. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics. Springer-Verlag. New-York, 1978. 266 p.

8. Тлеубергенов М.И. Обратные задачи стохастических дифференциальных систем // Математический журнал. 2003. Т. 3, № 1. С. 87-95.

#### Резюме

Қозғалыстың берілген қасиеттері бойынша Ито типтегі стохастикалық дифференциалдық теңдеулердің классында Лагранж, Гамильтон және Биркгоф теңдеулері құрылады. Кездейсоқ түртуші күштер Винер үрдістері классынан алынады деп ұйғарылған. Алынған нәтижелер Жердің жасанды спутнигінің тартылу күштері және аэродинамика күштері әсерінің нәтижесінде қозғалысының мысалында сипатталады.

#### Summary

It is built the Lagrange, Hamilton and Birkhoff equations by properties of movement in the class of stochastic differential Ito equations. The random perturbed forces are assumed from the class of Wiener processes. The received results are illustrated on an example of movement of Earth's satellite under the action of gravitation's and aerodynamics forces.

Институт математики  
МОН РК, г. Алматы

Поступила 1.10.07 г.