УДК 530.12

М. Е. АБИШЕВ

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ФОРМУЛЫ ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ СВЕТА В ОТО

Показано, что имеет место неоднозначность формулы вращения плоскости поляризации света в ОТО.

Влияние гравитационного поля вращающегося центрального тела на распространение света было рассмотрено Скроцким в работе [1]. При этом решались уравнения Максвелла для плоской электромагнитной волны методом развитым Рытовым [2, 3]. Поскольку пространственные масштабы в задачах астрономического характера огромны по сравнению с длинами электромагнитных волн, то коэффициенты, входящие в уравнения, оказываются чрезвычайно медленно изменяющимися функциями координат. Поэтому обычно ограничиваются приближением геометрической оптики.

Метод Рытова позволяет определить не только ход лучей, но и изменение характера поляризации волны вдоль луча. Скроцкий отмечает: «При распространении плоской волны вблизи вращающегося массивного тела траектория луча, вообще говоря, не является плоской кривой, а испытывает кручение в сторону вращения тела. При этом имеет место поворот плоскости поляризации, пропорциональный моменту импульса вращающегося тела. Замечательно, что плоскость поляризации лучей, исходящих из полюсов вращающегося тела и распространяющегося вдоль оси вращения, также поворачиваются на некоторый угол в сторону вращения тела» [1].

Скроцкий исходит из обычной метрики первого приближения Фока [4]

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U\right)dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)d\vec{r}^{\,2} +$$

$$+\left(+\,dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right) + + \frac{8}{c^2}\left(\vec{U}d\vec{r}\right)dt\,, \qquad (1)$$

где

$$U = \frac{\gamma m_0}{r}, \quad \vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3}\left[\vec{r}\vec{S}_0\right]. \qquad (2)$$

В (2) m_0 – масса вращающегося массивного шара, $\vec{S}_0$ – его угловой момент.

Уравнения Максвелла в таком стационарном поле тяготения формально совпадают с видом этих уравнений в материальных средах [5]

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0\,, \qquad (3)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{D} = 0\,.$$

Здесь векторы электрической и магнитной индукций равны соответственно

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} - \left[\vec{g}\vec{H}\right],\ \vec{B} = \mu\vec{H} + \left[\vec{g}\vec{E}\right], \qquad (4)$$

где

$$\varepsilon = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}},\ \ \mu = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}},\ \ g_i = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}c^2. \qquad (5)$$

Поскольку рассматриваемый процесс является периодическим ($\omega = ck$, $\vec{k}$ - волновой вектор), то (3) можно переписать следующим образом

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -ik\left(\mu\vec{H} + \left[\vec{g}\vec{E}\right]\right), \qquad (6)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = ik\left(\varepsilon\vec{E} - \left[\vec{g}\vec{H}\right]\right).$$

Следуя Рытову, решение этой системы ищем в виде

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}^*(x,y,z)}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-ik\Phi(x,y,z)},$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{H}^*(x,y,z)}{\sqrt{\mu}}e^{-ik\Phi(x,y,z)}. \qquad (7)$$

Далее, разложим функции $\vec{E}^*$ и $\vec{H}^*$ в ряд по степеням $\frac{i}{k}$:

$$\vec{E}^* = \vec{E}_0 + \frac{i}{k}\vec{E}_1 + \ldots,\ \ \vec{H}^* = \vec{H}_0 + \frac{i}{k}\vec{H}_1 + \ldots \qquad (8)$$

Подставляя (8) в (6), получим в нулевом приближении следующую систему уравнений для определения $\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$:

$$-\left[\vec{\nabla}\Phi-\vec{g},\vec{E}_0\right]+\sqrt{\varepsilon\mu}\vec{H}_0=0, \quad (9)$$
$$\sqrt{\varepsilon\mu}\vec{E}_0+\left[\vec{\nabla}\Phi-\vec{g},\vec{H}_0\right]=0.$$

Эта система линейных однородных уравнений будет иметь нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, т.е.

$$\left(\vec{\nabla}\Phi-\vec{g}\right)^2-\varepsilon\mu=0. \quad (10)$$

Мы получили обобщенное уравнение эйконала

$$\vec{\nabla}\Phi-\vec{g}=\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{e}, \quad (11)$$

где $\vec{e}$ - единичный вектор в направлении распространения волны в данной точке. Теперь система (9) запишется как

$$-\left[\vec{e},\vec{E}_0\right]+\vec{H}_0=0, \quad (12)$$
$$\vec{E}_0+\left[\vec{e},\vec{H}_0\right]=0.$$

Решение (12) можно записать в форме

$$\vec{E}_0=f_1\vec{n}+f_2\vec{b},\ \vec{H}_0=f_1\vec{b}+f_2\vec{n}, \quad (13)$$

где f_1 и f_2 - некоторые произвольные функции, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ - единичные векторы главной нормали и бинормали к лучу, которые совместно с вектором $\vec{e}$ образуют ортогональный репер. Уравнения первого приближения, из которых можно определить f_1 и f_2, таковы:

$$\left[\vec{\nabla}\Phi-\vec{g},\vec{H}_1\right]+\sqrt{\varepsilon\mu}\vec{E}_1=-\mathrm{rot}\,\vec{H}_0+\frac{1}{2\mu}\left[\vec{\nabla}\mu,\vec{H}_0\right], \quad (14)$$
$$-\sqrt{\varepsilon\mu}\vec{H}_1+\left[\vec{\nabla}\Phi-\vec{g},\vec{E}_1\right]=-\mathrm{rot}\,\vec{E}_0+\frac{1}{2\varepsilon}\left[\vec{\nabla}\varepsilon,\vec{E}_0\right].$$

Учитывая (11), имеем

$$\left[\vec{e},\vec{H}_1\right]+\vec{E}_1=-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\mathrm{rot}\,\vec{H}_0-\frac{1}{2\mu}\left[\vec{\nabla}\mu,\vec{H}_0\right]\right), \quad (15)$$
$$-\vec{H}_1+\left[\vec{e},\vec{E}_1\right]=-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}_0-\frac{1}{2\varepsilon}\left[\vec{\nabla}\varepsilon,\vec{E}_0\right]\right).$$

Условие разрешимости (15) состоит в ортогональности их правых частей к каждому из линейно независимых решений транспонированной однородной системы. Из этих условий следует важное соотношение

$$\frac{1}{2}\left(\vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{n}+\vec{b}\,\mathrm{rot}\,\vec{b}\right)=\left(\vec{e}\vec{\nabla}\right)\varphi, \quad (16)$$

$$\varphi=\mathrm{arctg}\frac{f_2}{f_1}, \quad (17)$$

где φ - угол между главной нормалью и вектором $\vec{E}_0$.

В дифференциальной геометрии доказано тождество [1]

$$\vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{n}+\vec{b}\,\mathrm{rot}\,\vec{b}=\frac{2}{\rho}+\vec{e}\,\mathrm{rot}\,\vec{e}, \quad (18)$$

где ρ - радиус кручения луча. Подставляя (18) в (16) и имея в виду, что $\left(\vec{e}\vec{\nabla}\right)=\partial/\partial s$ (ds - элемент длины дуги, отсчитываемый вдоль кривой), получим уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{1}{\rho}+\frac{1}{2}\vec{e}\,\mathrm{rot}\,\vec{e}. \quad (19)$$

Это выражение и есть закон поворота плоскости поляризации электромагнитной волны при ее распространении в поле тяготения сферического вращающегося массивного тела. Для лучей света, идущих от полюса вдоль оси вращения, поворот плоскости поляризации равен углу

$$\Delta\varphi_0=\frac{3\gamma S_0}{c^3R^2}+\vec{e}\,\mathrm{rot}\,\vec{e}, \quad (20)$$

где R - радиус, S_0 - угловой момент центрального тела.

Этот же эффект, т.е. поворот плоскости поляризации лучей света, идущих от полюса вдоль оси вращения центрального тела мы можем рассмотреть совсем по-другому, а именно в рамках механики ОТО.

Действительно, рассмотрим вопрос о собственном вращении пробного тела с массой m, движущегося от полюса вдоль оси вращения центрального вращающегося шара, с массой m_0, собственным моментом S_0. Далее, с пробным телом жестко свяжем систему координат, т.е. трехмерный ортогональный репер. Тогда, если исходить из уточненной метрики первого приближения Фока, то лагранжиан пробного тела [6]

$$L=-mc\frac{ds}{dt}=-mc^2+m\left(U+\frac{v^2}{2}\right)+$$
$$+\frac{m}{c^2}\left(\frac{U^2}{2}-\frac{3Uv^2}{2}-\frac{v^4}{8}\right)-$$

$$-\frac{4m(\vec{U}\vec{v})}{c^2}+\frac{2\gamma m}{7m_0c^2}(\vec{S}_0\vec{\nabla})\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right). \quad (21)$$

Импульс пробного тела

$$\vec{p}=\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}=\left[1-\frac{1}{c^2}\left(3U+\frac{v^2}{2}\right)\right]m\vec{v}-\frac{4m\vec{U}}{c^2}. \quad (22)$$

Разрешим это выражение относительно скорости пробного тела. Тогда

$$\vec{v}(\vec{r},\vec{p})=\left[1-\frac{1}{c^2}\left(3U+\frac{p^2}{2m^2}\right)\right]\frac{\vec{p}}{m}+\frac{2\gamma}{c^2r^3}[\vec{S}_0\vec{r}], \quad (23)$$

т.е. скорость пробного тела рассматривается как функция канонически сопряженных переменных $\vec{r}$ и $\vec{p}$.

Теперь применяя гидродинамическую формулу

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v}, \quad (24)$$

для угловой скорости пробного тела или подвижной системы координат, жестко связанной с пробным телом, получаем выражение

$$\vec{\omega}=\frac{3\gamma m_0}{2mc^2r^3}[\vec{r}\vec{p}]+\frac{\gamma}{c^2r^5}\left[3\vec{r}(\vec{r}\vec{S}_0)-\vec{S}_0r^2\right]. \quad (25)$$

В интересующем нас случае пробного тела, движущегося от полюса вдоль оси вращения центрального тела (25) приобретает вид

$$\vec{\omega}=\frac{2\gamma}{c^2r^3}\vec{S}_0. \quad (26)$$

Отсюда видно, что двигаясь даже по оси вращения пробное тело, и вместе с ним трехмерный ортогональный репер, приобретает вращение. Угол поворота

$$\Delta\varphi=\frac{2\gamma S_0}{c^2}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{r^3}, \quad (27)$$

Для света, точнее для плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси вращения центрального тела, тройка векторов $\vec{c}$, $\vec{E}$ и $\vec{H}$, т.е. ортогональная тройка, также приходит во вращение. Поворот плоскости поляризации вокруг оси вращения или вокруг $\vec{c}$ будет ($r = ct$)

$$\Delta\varphi=\frac{2\gamma S_0}{c^3}\int_{R}^{\infty}\frac{dr}{r^3}=\frac{4\gamma S_0}{c^3R^2}, \quad (28)$$

Сравнивая (28) и (20), мы видим, что в этих формулах все совпадает, кроме численных коэффициентов. Возникает неоднозначность в формуле вращения плоскости поляризации света, которая требует дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скроцкий Г.В.* О влиянии силы тяжести на распространение света // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114. С. 73-76.
2. *Рытов С.М.* О переходе от волновой к геометрической оптике // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18. С. 283-286.
3. *Рытов С.М.* Модулированные колебания и волны // Тр. ФИАН. 1940. Т. 2, вып. 1. С. 41-133.
4. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961. 563 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М., 1973. 400 с.
6. *Абишев М.Е.* Ортогональные реперы в поле вращающегося шара // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2007. Т. 3.

Резюме

ЖСТ жарықтың поляризация жазықтығының айналу формуласы бірмәнді емес екендігі көрсетілген.

Summary

In present work is shown, that light polarization plane rotation formula is ambiguous.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Поступила 2.04.08г.