УДК 530.12

М. Е. АБИШЕВ

К ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА ЗАДАЧИ ДВУХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ В ОТО

Показано, что лагранжиан задачи двух вращающихся тел в ОТО может быть получен без обращения к второму методу Фока, прямо из метрики первого приближения.

В работе [1, с. 101] приведена функция Лагранжа задачи двух сферически-симметричных вращающихся тел ($m_a \sim m_b$) в механике ОТО. Учитывая квазикеплеровый характер ($m << m_0$) основных модельных задач механики ОТО запишем эту функцию Лагранжа в виде

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + T +$$

$$+\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{8}mv^4 + \left(\frac{1}{3}\varepsilon + \frac{3}{2}T\right)v^2 - \frac{1}{4}J(\vec{\omega}\vec{v})^2\right] +$$

$$+\frac{\gamma m m_0}{r}\left[1 + \frac{3v^2}{2c^2} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\xi_0}{m_0} + \frac{\xi}{m}\right) - \frac{\gamma m_0}{2c^2 r}\right] +$$

$$+\frac{\gamma}{2c^2}\left(\left[\left(3m_0\vec{S} + 4m\vec{S}_0\right)\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{v}\right) +$$

$$+\frac{\gamma}{c^2}\left(\left[\vec{S}\vec{\nabla}\right]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\right)\frac{1}{r} + \frac{2\gamma m}{7m_0c^2}\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\right)\frac{1}{r}\,, \quad (1)$$

Если в начальный момент времени пробное тело m не имеет собственного вращения ($\vec{\omega} = 0$), то (1) приобретает вид

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{v^2}{4c^2}\right) +$$

$$+\frac{\gamma m m_0}{r}\left[1 + \frac{3v^2}{2c^2} + \frac{\xi_0}{m_0c^2} - \frac{\gamma m_0}{2c^2 r}\right] +$$

$$+\frac{2\gamma m}{c^2}\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{v}\right) + \frac{2\gamma m}{7m_0c^2}\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\right)\frac{1}{r}\,. \quad (2)$$

Таким образом, эта функция Лагранжа, описывающая задачу двух тел, где одно тело имеет собственное вращение, а другое нет, есть частный случай лагранжиана задачи двух вращающихся тел, выведенного методом Фока из уравнений Эйнштейна. Это во-первых.

Во-вторых, функцию Лагранжа (2) можно элементарно получить прямо из уточненной метрики первого приближения Фока

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} - \frac{2\gamma}{c^2}\right.$$

$$\left.\int\frac{\rho'(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U)' - P'_{kk}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}(dx')^3\right)dt^2 -$$

$$-\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right) +$$

$$+\frac{8}{c^2}\left(U_1dx_1 + U_2dx_2 + U_3dx_3\right)dt\,, \quad (3)$$

если вычислить интеграл от внутренней структуры [1, с. 108].

Это обстоятельство ценно тем, что метрику первого приближения можно установить однозначно, чего нельзя сказать о лагранжиане, полученного путем решения уравнений Эйнштейна тем или иным приближенным методом (проблема однозначности релятивистских уравнений движения).

В третьих, существует принцип суперпозиции релятивистских эффектов [1, с. 14]. Опираясь на этот принцип, опустим в (1) и (2) те члены, которые связаны с изменением массы m и не имеют для нас особого принципиального значения (т.е. для задачи двух вращающихся тел) Тогда (1) и (2) приобретают соответственно вид

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{\gamma m m_0}{r} +$$

$$+ \frac{\gamma}{2c^2}\left(\left[\left(3m_0\vec{S} + 4m\vec{S}_0\right)\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{v}\right) +$$

$$+ \frac{\gamma}{c^2}\left(\left[\vec{S}\vec{\nabla}\right]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\right)\frac{1}{r} + \frac{2\gamma m}{7m_0c^2}\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\right)\frac{1}{r}, \quad (4)$$

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{\gamma m m_0}{r} +$$

$$+ \frac{2\gamma m}{c^2}\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{v}\right) + \frac{2\gamma m}{7m_0c^2}\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\right)\frac{1}{r}. \quad (5)$$

В четвертых, возникает принципиальная задача, можно ли обратно, из функции Лагранжа (5) получить лагранжиан (4). Это кажется несколько абсурдным, тем не менее это достойно усилия, ибо лагранжиан (5) можно получить из уточненной метрики первого приближения Фока, тогда и (4) получалась бы из этой метрики. Тогда была бы надежно решена проблема однозначности релятивистских уравнений движения.

В пятых, тут, возможно, нам поможет метод гидродинамической аналогии [1, с. 39].

Действительно, чтобы выражение (5) совпало с (4) надо отыскать дополнительные члены

$$\delta L = \frac{3\gamma m}{2c^2}\left(\left[\vec{S}\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{v}\right) + \frac{\gamma}{c^2}\left(\left[\vec{S}\vec{\nabla}\right]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\right)\frac{1}{r}. \quad (6)$$

Согласно гидродинамической аналогии, пробное тело с массой m приобретает угловую скорость [1, с. 41]

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v} = \frac{3\gamma m_0}{2c^2r^3}\left[\vec{r}\vec{v}\right] + \frac{\gamma}{c^2r^5}\left[3\vec{r}\left(\vec{r}\vec{S}_0\right) - \vec{S}_0r^2\right]. \quad (7)$$

Тогда

$$\vec{\omega} = \frac{\partial H}{\partial \vec{S}}, \quad (8)$$

и к (7) соответствует поправка

$$\Delta L = -\left(\vec{S}\vec{\omega}\right) =$$

$$= -\frac{3\gamma m}{2c^2r^3}\left(\vec{S}\left[\vec{r}\vec{v}\right]\right) - \frac{\gamma}{c^2r^5}\left[3\left(\vec{S}\vec{r}\right)\left(\vec{r}\vec{S}_0\right) - \left(\vec{S}\vec{S}_0\right)r^2\right] =$$

$$= \frac{3\gamma m}{2c^2}\left(\left[\vec{S}\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{v}\right) + \frac{\gamma}{c^2}\left(\left[\vec{S}\vec{\nabla}\right]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\right)\frac{1}{r}. \quad (9)$$

Это и есть искомая поправка (6).

Таким образом, уточненная метрика первого приближения Фока и гидродинамическая аналогия полностью позволяют восстановить функцию Лагранжа задачи двух вращающихся тел в механике ОТО. Это уже решает проблему однозначности релятивистских уравнений движения тел в механике ОТО.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абдильдин М.М.* Механика теории гравитации Эйнштейна. Алма-Ата. 1988. 198 с.

Резюме

ЖСТ екі айналмалы дене есебі лагранжианын Фоктың екінші әдісіне жүгінбестен, тікелей бірінші жуықтау метрикасынан алуға болатыны көрсетілген.

Summary

In present work is shown, that it's possible to obtain the Lagrange function of two rotating bodies in GR without using Fock's second method, but directly from first approximation metrics.

Казахский национальный
университет им. аль-Фараби,
г. Алматы
Поступила 2.04.08г.