УДК 530.145.6

М. ДИНЕЙХАН, С. А. ЖАУГАШЕВА, С. И.ВАСИТОВА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССОВОГО СПЕКТРА ОДДЕРОНОВ С УЧЕТОМ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ХАРАКТЕРА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Предложен метод определения массового спектра релятивистского связанного состояния состоящего из n-частиц с учетом релятивистского характера взаимодействия. Вычислен массовый спектр и конституентные массы составляющих частиц. В частности, в рамках данного подхода вычислен энергетический спектр трехглюонного связанного состояния – оддерона. Полученные численные результаты удовлетворительно согласуются с существующими результатами.

1. Введение.

В настоящий момент квантовые эффекты широко применяются в различных научных, технических сферах, например, в микроэлектронике, нанотехнологии, биотехнологии, квантовой химии и др. В частности, в микроэлектронике широко используются законы квантовой механики, а в современных высокотехнологических процессах для управления начали использовать спиновое взаимодействие составляющих. Таким образом, релятивистские эффекты широко исследуются как с фундаментальной, так и практической точки зрения. Одна из основных принципов релятивистского квантового эффекта является сохранение закона релятивистской инвариантности.

Гамильтониан свободной релятивистской частицы имеет выражение [1]

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}\ ;$$

тогда релятивистское УШ будет выглядеть так:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4}\,\psi\ .$$

Здесь мы сразу сталкиваемся с проблемой интерпретации квадратного корня из оператора в правой части (УШ). Если разложить корень в ряд, то мы получим уравнение, содержащее все степени оператора дифференцирования; следовательно, теория нелокальна. В таких теориях имеются серьезные трудности, и они представляют собой весьма непривлекательный вариант уравнения Шредингера.

Второе уравнение описывает релятивистскую инвариантность теории. Однако, из второго уравнения определить собственные значения и волновую функцию с точки зрения математического вычисления почти не возможно, даже для стационарного случая. Во вторых, в гамильтониан еще не включено взаимодействие. В настоящий момент учет взаимодействия между составляющими осуществляется двумя способами: первое – релятивистское уравнение Солпитера [2], а во вторых, исходя из условия калибровочной инвариантности [3]. К сожалению, оба подхода имеют свои плюсы и минусы (подробно см. в [4]). Дирак, в работе [5] 1947 году, исходя из основного принципа симметрии, установил критерии построения релятивистского гамильтониана. Однако, в этом случае, возможно, установить некоторые соотношения между измеряемыми величинами, исходя из групповых соображении или ковариантной инвариантности преобразования. Учет релятивистских эффектов в адронной физике предложен в [6]. Однако этот подход в основном хорошо описывает адронов состоящего из тяжелых кварков, когда рассматриваются адроны состоящие из легких кварков или состоящие из глюонов, так называемых глюболов и оддеронов, теряют свое описывающее свойство, т.е. требуют введения дополнительного параметра, который связывает с релятивистским характером взаимодействия.

Поэтому построение универсального релятивистского гамильтониана или описание свойств адронов состоящих из легких кварков является одним из актуальных проблем физики элементарных частиц современности. Данная работа посвящена к построению альтернативных подходов релятивистского гамильтониана с учетом релятивистских инвариантностей взаимодействия.

2. Определение массового спектра релятивистского связанного состояния состоящего из *n*-частиц. Рассмотрим взаимодействие n заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле. Массу связанного состояния определим на основе исследования асимптотического поведения функции поляризованной петли для

n заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле. Функции поляризованной петли для n скалярных частиц записывается следующим образом:

$$\Pi(x-y)=\langle G_{m_1}(x,y|A)\times$$

$$\times G_{m_2}(y,x|A)G_{m_3}(x,y|A)\ldots G_{m_n}(x,y|A)\rangle_A. \quad (1)$$

Функция Грина $G_m(x,y|A)$ для скалярной частицы во внешнем калибровочном поле определяется из уравнения:

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+\frac{g}{c\hbar}A_\alpha(x)\right)^2+\frac{c^2m^2}{\hbar^2}\right]G(x,y|A)=\delta(x-y), \quad (2)$$

где m - масса скалярной частицы, а g - константа связи. При усреднении по внешнему калибровочному полю $A_\alpha(x)$ ограничиваемся только низшим порядком, т.е. учитываем только двухточечный Гауссов коррелятор:

$$\left\langle \exp\left\{i\int dx A_\alpha(x)J_\alpha(x)\right\}\right\rangle_A=$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\iint dxdy J_\alpha(x)D_{\alpha\beta}(x-y)J_\beta(y)\right\}. \quad (3)$$

Здесь $J_\alpha(x)$ - реальный ток, а пропагатор $D_{\alpha\beta}(x-y)$ калибровочного поля:

$$D_{\alpha\beta}(x-y)=\langle A_\alpha(x)A_\beta(y)\rangle_A. \quad (4)$$

Решение уравнения (2) представляется в виде функционального интеграла следующим образом (подробно см. [7]):

$$G(x,y|A)=\int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi s)^2}\exp\left\{-sm^2-\frac{(x-y)^2}{4s}\right\}\times$$

$$\times\int d\sigma_B \exp\left\{ig\int_0^\infty d\xi\frac{\partial Z_\alpha(\xi)}{\partial\xi}A_\alpha(\xi)\right\}, \quad (5)$$

где введены обозначения:

$$Z_\alpha(\xi)=(x-y)_\alpha+y_\alpha-2\sqrt{s}B_\alpha(\xi),$$

$$d\sigma_B=N\delta B\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^1 d\xi B^2(\xi)\right\}, \quad (6)$$

с нормировкой:

$$B_\alpha(0)=B_\alpha(1), \qquad \int d\sigma_B=1. \quad (7)$$

Подставляя (5) в (1), и согласно с (3), проведя усреднение по внешнему калибровочному полю $A_\alpha(x)$ для функции-петли, имеем:

$$\Pi(x)=\iint_0^\infty\ldots\int_0^\infty\frac{d\mu_1 d\mu_2\ldots d\mu_n}{(8\pi^2 x)^n}\cdot J(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{|x|}{2}\left(\frac{m_1^2}{\mu_1}+\mu_1\right)-\frac{|x|}{2}\left(\frac{m_2^2}{\mu_2}+\mu_2\right)-\ldots-\right.$$

$$\times\exp\left\{-\frac{|x|}{2}\left(\frac{m_1^2}{\mu_1}+\mu_1\right)-\frac{|x|}{2}\left(\frac{m_2^2}{\mu_2}+\mu_2\right)-\ldots\right. \quad (8)$$

Здесь $x\equiv|\vec{x}-\vec{y}|$,

$$J(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)=N_1N_2\ldots N_n\iint\ldots\int\delta\vec{r}_1\delta\vec{r}_2\ldots\delta\vec{r}_n\times$$

$$\times\exp\left\{-W_{1,1}-W_{2,2}-\ldots-W_{n,n}+2\sum_{i,j=1;i\neq j}W_{i,j}\right\}\times \quad (9)$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x d\tau\left[\mu_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2}(\tau)+\mu_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}(\tau)+\ldots+\mu_n\dot{\vec{r}}_n^{\,2}(\tau)\right]\right\},$$

и использовано обозначение:

$$W_{i,j}=(-1)^{i+j}\frac{g^2}{2}\iint_0^x d\tau_1 d\tau_2\dot{Z}_\alpha^{(i)}(\tau_1)\times$$

$$\times D_{\alpha\beta}\left\{Z^{(i)}(\tau_1)-Z^{(j)}(\tau_2)\right\}\dot{Z}_\beta^{(j)}(\tau_2), \quad (10)$$

где N_j - нормировочная константа, $i,j=1,2,\ldots,n$.

Мы определили функцию-петлю, для n скалярных частиц с массами $m_1,m_2,\ldots,m_n$, которые взаимодействуют между собой обменным калибровочным полем. Существует два типа взаимодействия: первое – взаимодействие составляющих частиц посредством калибровочного поля, вклад которого определяется непосредственно $W_{i,j}\ (i\neq j)$, второе – взаимодействие составляющих частиц самих с собой, т.е. диаграмма собственной энергии, вклад которой определяется $W_{1,1},W_{2,2},\ldots,W_{n,n}$. В нерелятивистском пределе величина $W_{i,j}$ соответствует потенциальным взаимодействиям, а $W_{1,1}, W_{2,2}, \ldots, W_{n,n}$ соответствуют не потенциальным взаимодействиям, которые определяют вклад в перенормировку массы собственной энергии. С другой стороны, функциональный интеграл (9) похож на Фейнмановский интеграл по траекториям для движения n скалярных частиц с массами $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ в нерелятивистской квантовой механике [8]. Взаимодействие между этими частицами описывается выражением (10), которое содержит как потенциальные, так и не потенциальные взаимодействия.

Для свободного состояния, т.е.

$$W_{i,j} = 0. \tag{11}$$

Из (9) и (8) получаем

$$H = \sqrt{m_1^2 + \vec{p}_1^{\,2}} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}_2^{\,2}} + \ldots .$$

т.е. гамильтониан для свободной частицы представлен в релятивистской инвариантной форме.

Нашей задачей является определить массу связанного состояния с учетом релятивистской инвариантности. Обычно массу связанного состояния определяют через функцию-петлю $\Pi(x)$ следующим образом:

$$M = -\lim_{x\to\infty} \frac{\ln \Pi(x)}{x}. \tag{12}$$

Согласно (9) гамильтониан взаимодействия для n-скалярных частиц записывается в виде:

$$H = \frac{1}{2\mu_1}\vec{P}_1^2 + \frac{1}{2\mu_2}\vec{P}_2^2 + \ldots + \frac{1}{2\mu_n}\vec{P}_n^2 + $$

$$+ V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n), \tag{13}$$

а потенциал взаимодействия V определяется через $W_{i,j}$ при переходе к нерелятивистскому пределу.

Из уравнения Шредингера (УШ)

$$H\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n) = E(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n), \tag{14}$$

будем определять собственные значения гамильтониана. Тогда в этом случае интеграл (9) можно представить в следующем виде:

$$\lim_{|x|\to\infty} J(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) = \exp\{-xE(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)\}, \tag{15}$$

где $E(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ являются собственными значениями гамильтониана (13) и определяются из уравнения (14). В этом приближении интеграл, представленный в (8), в асимптотике $x \to \infty$ вычисляется методом перевала, учитывая (15) для масс связанного состояния из (12) имеем:

$$M = \frac{1}{2}\min_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}\left\{\frac{m_1^2}{\mu_1} + \mu_1 + \frac{m_2^2}{\mu_2} + \mu_2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{m_n^2}{\mu_n} + \mu_n + 2E(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)\right\}, \tag{16}$$

где конституентная масса μ_j определяется из системы уравнения

$$\mu_j - \frac{m_j^2}{\mu_j} + 2\mu_j \frac{dE(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)}{d\mu_j} = 0;$$

$$j = 1,2,\ldots,n. \tag{17}$$

Параметры $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ рассматриваются как массы составляющих в связанном состоянии. Эти массы отличаются от $m_1, m_2, \ldots, m_n$ - масс исходного (свободного) состояния.

При дальнейших вычислениях вводим инвариантную массу двух-, трех- и n-тельных систем стандартным образом:

$$\frac{1}{M_2} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2};\quad \frac{1}{M_3} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{1}{\mu_3};$$

$$\frac{1}{M_4} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} + \frac{1}{\mu_4};$$

$$\ldots$$

$$\frac{1}{M_n} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{n-1}} + \frac{1}{\mu_n}. \tag{18}$$

Тогда, массовый спектр связанного состояния, с помощью этих инвариантных масс определятся в виде:

$$M = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n +$$

$$+ M_2\frac{dE}{dM_2} + M_3\frac{dE}{dM_3} + \cdots + M_n\frac{dE}{dM_n}. \tag{19}$$

В этом случае конституентные массы $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ определяются из следующих систем уравнений:

$$1-\frac{m_1^2}{\mu_1^2}+\frac{2M_2^2dE}{\mu_1^2dM_2}+\frac{2M_3^2dE}{\left(\mu_1+\mu_2\right)^2dM_3}+$$

$$+\cdots+\frac{2M_n^2dE}{\left(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n-1}\right)^2dM_n};$$

$$1-\frac{m_2^2}{\mu_2^2}+\frac{2M_2^2dE}{\mu_2^2dM_2}+\frac{2M_3^2dE}{\left(\mu_1+\mu_2\right)^2dM_3}+$$

$$+\cdots+\frac{2M_n^2dE}{\left(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n-1}\right)^2dM_n};$$

$$1-\frac{m_3^2}{\mu_3^2}+\frac{2M_3^2dE}{\mu_3^2dM_3}+\frac{2M_4^2dE}{\left(\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)^2dM_4}+$$

$$+\cdots+\frac{2M_n^2dE}{\left(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n-1}\right)^2dM_n};$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$1-\frac{m_{n-1}^2}{\mu_{n-1}^2}+\frac{2M_{n-1}^2dE}{\mu_{n-1}^2dM_{n-1}}+\frac{2M_n^2dE}{\left(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n-1}\right)^2dM_n};$$

$$1-\frac{m_n^2}{\mu_n^2}+\frac{2M_n^2dE}{\mu_n^2dM_n}. \qquad (20)$$

Из (19) и (20) видно для определения масс и конституентной масс релятивистского связанного состоянии, прежде всего, нужно определить собственные значения $E(M_2, M_3, \ldots, M_n)$ релятивистского гамильтониана (13) из уравнения (14).

Система уравнения представленной в (20) при конкретных значениях n определяются аналитический, в частности для $n = 2$ имеем:

$$M=\mu_1+\mu_2+M_2\frac{dE}{dM_2}+E(M_2); \qquad (21)$$

$$\mu_1=\sqrt{m_1^2-2M_2^2\frac{dE}{dM_2}};$$

$$\mu_2=\sqrt{m_2^2-2M_2^2\frac{dE}{dM_2}};$$

а для $n = 3$ из (20) получаем

$$M=\mu_1+\mu_2+\mu_3+$$

$$+M_2\frac{dE}{dM_2}+M_3\frac{dE}{dM_3}+E(M_2,M_3);$$

$$\mu_3=\sqrt{m_3^2-2M_3^2\frac{dE}{dM_3}};$$

$$\mu_j=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{m_j^2-2M_2^2\frac{dE}{dM_2}}\times$$

$$\times\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{8M_2^2M_3^2\left(dE/dM_3\right)}{\left(m_1^2-2M_2^2\left(dE/dM_2\right)\right)\left(m_2^2-2M_2^2\left(dE/dM_2\right)\right)}}};$$

$$j=1,2;$$

$$\frac{1}{M_2}=\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}; \qquad \frac{1}{M_3}=\frac{1}{\mu_1+\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}. \qquad (22)$$

Таким образом мы можем определить массы и конституентные массы связанного состояния состоящего из n-заряженных скалярных частиц с учетом релятивистских эффектов.

3. Вычисление массового спектра трехглюонного связанного состояния. Рассмотрим трехглюонное связанное состояние. Глюон находится только в связанном состоянии, поэтому гамильтониан взаимодействия выбираем так, чтобы он удовлетворял условию конфайнмента глюона. Тогда УШ такой системы записывается в виде:

$$\left(\frac{1}{2\mu_1}\vec{P}^2{}_1+\frac{1}{2\mu_2}\vec{P}^2{}_2+\frac{1}{2\mu_3}\vec{P}^2{}_3+\right.$$

$$\left.+V\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3\right)\right)\psi=E\psi; \qquad (23)$$

где потенциал взаимодействия

$$V\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3\right)=-\frac{3}{4}\alpha_s\left[\frac{1}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|}+\frac{1}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_3\right|}+\frac{1}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|}\right]+$$

$$+\sigma\left[\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|+\left|\vec{r}_1-\vec{r}_3\right|+\left|\vec{r}_2-\vec{r}_3\right|\right]. \qquad (24)$$

Первое слагаемое в (24) соответствует одноглюонному обмену, а второе слагаемое – линейный потенциал заперения.

Для определения из (23) энергетического спектра переходим к системе центра масс. Выбирая систему центра масс $\vec{z}$ и координаты Якоби $\{\vec{x},\vec{y}\}$в виде:

$$\vec{r}_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\cdot\vec{x} + \frac{\mu_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\cdot\vec{y}+\vec{z};$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\cdot\vec{x} + \frac{\mu_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\cdot\vec{y}+\vec{z}; \quad (25)$$

$$\vec{r}_3 = -\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\cdot\vec{y}+\vec{z}$$

а также проводя некоторые упрощения из (24) для гамильтониана системы получаем:

$$\mathrm{H} \quad \frac{1}{2M_2}\vec{P}_{\vec{x}}^2 + \frac{1}{2M_3}\vec{P}_y^2 -$$

$$-\frac{3\alpha_s}{4}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\left|\vec{y}+\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\vec{x}\right|} + \frac{1}{\left|\vec{y}-\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\vec{x}\right|}\right] +$$

$$+\sigma\left[x + \left|\vec{y}+\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\vec{x}\right| + \left|\vec{y}-\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\vec{x}\right|\right]. \quad (26)$$

Для удобства в дальнейших вычислениях переходим к безразмерным переменным:

$$\vec{x} = \frac{1}{M_2}\vec{R}; \quad \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{M_2 M_3}}\vec{r}; \quad E = \frac{1}{2}M_2 U \ , (27)$$

где M_2 и M_3 определены в (22).

Тогда, учитывая (26) и (27), из (23) для УШ имеем:

$$\left\{\frac{1}{2}\vec{P}_R^2 + \frac{1}{2}\vec{P}_r^2 - \frac{3\alpha_s}{4}\left[\frac{1}{R} + \frac{\lambda}{\left|\vec{r}+c_1\vec{R}\right|} + \frac{\lambda}{\left|\vec{r}-c_2\vec{R}\right|}\right] + \right.$$

$$\left. +\frac{\sigma}{M_2^2}\left[R + \frac{1}{\lambda}\left|\vec{r}+c_1\vec{R}\right| + \frac{1}{\lambda}\left|\vec{r}-c_2\vec{R}\right|\right] - \frac{1}{2}U\right\}\times$$

$$\times\psi\left(\vec{r},\vec{R}\right) = 0\,. \quad (28)$$

Здесь использовано следующее обозначение:

$$c_j = \frac{1}{\mu_j}\cdot\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}}; \qquad j = 1,2.,$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}}\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right) = \sqrt{\frac{M_3}{M_2}}\ . \ (29)$$

Задача состоит в определении из УШ (28) параметра U и волновой функции (ВФ) системы в рамках метода ОП [9]. Для этого используем двуцентровое адиабатическое приближение.

4. Двуцентровое адиабатическое приближение. Адиабатическое приближение является одним из самых распространенных методов в физике и заключается в приближенном разделении «быстрых» и «медленных» переменных динамической системы. В квантовой механике (КМ) основы адиабатического приближения были заложены Борном и Оппенгеймером [10], а затем Борном и Фоком [11] для решения УШ. В данном пункте изложим детали применения двуцентрового приближения для решения УШ в релятивистической трехтельной системе в рамках ОП.

Будем рассматривать трехтельную релятивистическую систему, т.е. трехглюонное связанное состояние. В двуцентровом приближений ВФ системы представляется в виде [12]:

$$\psi\left(\vec{R},\vec{r}\right) = \chi\left(\vec{R}\right)\cdot\psi\left(R,\vec{r}\right)\ , \qquad (30)$$

где $\Phi\left(R,\vec{r}\right)$ - волновая функция внутренней системы, которая обычно определяется как:

$$\psi\left(R,\vec{r}\right) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\Phi_m\left(R,\rho,\eta\right). \qquad (31)$$

Здесь φ - азимутальный угол, а m - азимутальное квантовое число. С учетом (30) и (31) в цилиндрической системе координат после некоторых упрощений из (28) УШ для ВФ внутренней системы получаем:

$$\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right] - \right.$$

$$-\frac{3\alpha_s}{4}\left[\frac{\lambda}{\sqrt{\eta^2+\rho^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{\rho^2+\eta^2-2\lambda R\eta+\lambda^2 R^2}}\right] +$$

$$+\frac{\sigma}{M_2^2\lambda}\left[\sqrt{\eta^2+\rho^2}+\sqrt{\rho^2+\eta^2-2\lambda R\eta+\lambda^2R^2}\,\right]\Bigg\}\times$$

$$\times\Phi_m(R,\rho,\eta)\quad E_m(R)\Phi_m(R,\rho,\eta),\qquad (32)$$

где $E_m(R)$ - является собственным значением гамильтониана внутренней системы. В (32) переменная R рассматривается как внешний параметр. Стандартное вычисление обычно приводит к вытянутым сфероидальным координатам [13], при этом параметр R определяет фокусное расстояние, а $E_m(R)$ - называется термом энергетических уровней. В вытянутых сфероидальных системах координат УШ представленное в (32), допускает разделение переменных и получается два уравнения, которые решаются только численными методами (подробно см. в [13, 14]). В данной работе, для определения энергетического терма $E_m(R)$ применим метод ОП.

5. Двуцентровое приближение в ОП.

Теперь приступим к вычислению энергетического терма $E_m(R)$ внутренней системы в рамках метода ОП. Для этого проводим замену переменных:

$$\rho=2\sqrt{\rho_1\cdot\rho_2};$$

$$\eta=\rho_1-\rho_2;\qquad \rho^2+\eta^2=(\rho_1+\rho_2)^2\qquad (33)$$

и перейдем к параболической системе координат. После необходимых вычислений, из (32) получаем:

$$\left\{-\frac{1}{2}\left[\rho_1\frac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}+\frac{\partial}{\partial\rho_1}+\rho_2\frac{\partial^2}{\partial\rho_2^2}+\frac{\partial}{\partial\rho_2}-\frac{m^2}{4\rho_1}-\frac{m^2}{4\rho_2}\right]+\right.$$

$$+\frac{\sigma}{M_2^2\lambda}\Big[(\rho_1+\rho_2)^2+(\rho_1+\rho_2)\times$$

$$\left.\times\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-2\lambda R(\rho_1-\rho_2)+\lambda^2R^2}\,\right]-$$

$$-\frac{3\alpha_s\lambda}{4}\left[1+\frac{\rho_1+\rho_2}{\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-2\lambda R(\rho_1-\rho_2)+\lambda^2R^2}}\right]-$$

$$\left.-E_m(\rho_1+\rho_2)\right\}\Phi_m=0\,.\qquad (34)$$

Для определения энергетического терма $E_m(R)$ из (33) применим метод ОП. Перед тем как определить энергетический спектр и волновую функцию из УШ (33) с помощью метода ОП [9], уместно напомнить, что этот метод основан на идеях и методах квантовой теории скалярного поля. Одним из существенных отличий квантовой теории поля (КТП) от КМ является то, что квантованные поля, представляющие набор бесконечного числа осцилляторов для основного состояния или вакуума, при квантово-полевом взаимодействии сохраняют свою осцилляторную природу. В КМ собственные функции для большинства, как правило, отличаются от гауссовского поведения осцилляторной волновой функции. Поэтому, для применения методов и идеи КТП к решению квантово-механических задач, следует в исходном радиальном УШ провести замену переменных таким образом, чтобы искомая волновая функция на больших расстояниях обладала гауссовским поведением. Затем, преобразованное уравнение идентифицируется с радиальным УШ в пространстве с большой размерностью [9]. Отметим, что впервые похожая идея обсуждалась Фоком при решении задачи о спектре атома водорода с помощью трансформации в четырехмерном пространстве импульсов [15].

Будем считать асимптотическое поведение волновой функции внутренней системы кулоновским. В соответствии с изложенным выше проведем замену переменных следующим образом (детали см. в [9]):

$$\rho_j=q_j^2;$$

$$\Phi_m(\rho_1,\rho_2)=q_1^{|m|}\cdot q_2^{|m|}\cdot\psi_m\left(q_1^2,q_2^2\right)\quad j=1,2.\ (35)$$

Используя атомную систему единиц ($\hbar=1,\quad c=1,\quad e=1$), получим из (33) для УШ:

$$\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{d^2}{dq_j^2}+\frac{d-1}{q_j}\frac{\partial}{\partial q_j}\right]-3\alpha_s\lambda-\right.$$

$$-\frac{3\alpha_s\lambda\left(q_1^2+q_2^2\right)}{\sqrt{\left(q_1^2+q_2^2\right)^2-2\lambda R\left(q_1^2-q_2^2\right)+\lambda^2R^2}}+$$

$$+\frac{4\sigma}{M_2^2\lambda}\left(q_1^2+q_2^2\right)^2+\frac{4\sigma}{M_2^2\lambda}\left(q_1^2+q_2^2\right)\times$$

$$\times\sqrt{\left(q_1^2+q_2^2\right)^2-2\lambda R\left(q_1^2-q_2^2\right)+\lambda^2R^2}-$$

$$\left.-4E_m\left(q_1^2+q_2^2\right)\right\}\psi_m\left(R,q_1^2,q_2^2\right)=0\,,\qquad (36)$$

где d - размерность вспомогательного пространства:

$$d = 2 + 2|m|. \quad (37)$$

В результате замены переменных мы получили модифицированное уравнение Шредингера в d-мерном вспомогательном пространстве R^d. Из (36) и (37) следует, что азимутальное квантовое число m вошло в определение размерности пространства d. Данный прием позволяет определить все интересующие нас характеристики, а именно, спектр и волновую функцию, решая модифицированное УШ только для основного состояния в d-мерном вспомогательном пространстве R^d. Волновая функция $\psi_m\left(q_1^2, q_2^2\right)$ основного состояния в R^d зависит только от переменных q_1^2, q_2^2. Поэтому оператор:

$$\frac{\partial^2}{\partial q_j^2} + \frac{d-1}{q_j} \cdot \frac{\partial}{\partial q_k} \equiv \Delta_{q_j}, \qquad j = 1,2, \quad (38)$$

отождествим с лапласианом Δ_{q_j} в вспомогательном пространстве R^d, который действует на волновую функцию основного состояния, зависящую только от радиуса q_j. Собственное значение гамильтониана модифицированного УШ

$$H\psi_m(q_1, q_2) = \varepsilon(E_m)\psi_m(q_1, q_2), \quad (39)$$

равен нулю. Поэтому искомое значение энергии определяется уравнением

$$\varepsilon(E_m) = 0. \quad (40)$$

Будем рассматривать это соотношение как условие определения энергетического спектра E_m гамильтониана (32). Следуя методу ОП [9], представим канонические переменные через операторы рождения и уничтожения в пространстве R^d:

$$q_j^{(k)} = \frac{a_j^k + a_j^{k+}}{\sqrt{2\omega_k}}; \qquad P_j^{(k)} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \cdot \frac{a_j^k + a_j^{k+}}{i};$$

$$k = 1,2; \quad j = 1,\ldots,d, \quad \left[a_j^k, a_j^{k+}\right] = \delta_{i,j}, \quad (41)$$

где ω_k - частота осциллятора, которая пока не известна. Подставляя (41) в (36) и упорядочивая по операторам рождения и уничтожения, получаем

$$H = H_0 + \varepsilon_0(E_m) + H_I. \quad (42)$$

Здесь H_0 - является гамильтонианом двух не связанных осцилляторов

$$H_0 = \omega_1\left(a_j^+(1) \cdot a_j(1)\right) + \omega_2\left(a_j^+(2) \cdot a_j(2)\right), \quad (43)$$

а $\varepsilon_0(E_m)$ - энергия основного состояния в нулевом приближении ОП [9], которая имеет вид:

$$\varepsilon_0(E_m) = \frac{d}{4}\omega_1 + \frac{d}{4}\omega_2 - \frac{2d \cdot E_m}{\omega_1} - \frac{2d \cdot E_m}{\omega_2} -$$
$$-3\alpha_s\lambda + \frac{4\sigma}{M_2^2\lambda} \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(\frac{d}{2}+1\right) \cdot \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right)^2 +$$
$$+\frac{4\sigma}{M_2^2\lambda} \cdot \frac{(\omega_1\omega_2)^{\frac{d}{2}}}{\Gamma^2\left(\frac{d}{2}\right)} \cdot \iint_0^\infty d\beta_1 d\beta_2 (\beta_1 \cdot \beta_2)^{\frac{d}{2}-1} \times$$
$$\times\sqrt{(\beta_1+\beta_2)^2 - 2\lambda R(\beta_1-\beta_2) + \lambda^2 R^2} \times$$
$$\times e^{-\beta_1\omega_1 - \beta_2\omega_2} - \frac{3\alpha_s\lambda(\omega_1\omega_2)^{\frac{d}{2}}}{\Gamma^2\left(\frac{d}{2}\right)} \times \quad (44)$$
$$\times\iint_0^\infty \frac{d\beta_1 d\beta_2 (\beta_1+\beta_2) \cdot (\beta_1 \cdot \beta_2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-\beta_1\omega_1 - \beta_2\omega_2}}{\sqrt{(\beta_1+\beta_2)^2 - 2\lambda R(\beta_1-\beta_2) + \lambda^2 R^2}}.$$

Гамильтониан взаимодействия H_I, также представляются в нормальной форме по операторам рождения и уничтожения, причем он не содержит квадратичных слагаемых по каноническим переменным.

В квантовой теории поля, после представления гамильтониана взаимодействия в нормальной форме требование отсутствия в гамильтониане взаимодействия полевых операторов второй степени по существу эквивалентно перенормировкам массы и волновой функции [16]. Такая процедура позволяет учесть основной квантовый вклад через перенормировку масс и энергии вакуума. Другими словами, все квадратичные формы полностью включены в гамильтониан свободного осциллятора. Данное требование позволяет сформулировать согласно осцилляторному представлению, условия [9]

$$\frac{\partial\varepsilon_0(E)}{\partial\omega_1} = 0, \qquad \frac{\partial\varepsilon_0(E)}{\partial\omega_2} = 0, \quad (45)$$

для нахождения частоты ω_1 и ω_2 не связанных осцилляторов, которые определяют основной квантовый вклад. Таким образом, учитывая (34), из уравнений (40) и (45) мы можем определить энергию E_m внутренней системы как функцию от параметра R.

В ОП первая поправка по гамильтониану взаимодействия тождественно равна нулю, в то время как вторая поправка составляет менее одного процента, и ряд теории возмущений быстро сходится. Эти результаты

Были проверены для различных видов потенциалов, и показана высокая точность нулевого приближения ОП. Поэтому при дальнейших вычислениях, мы будем ограничиваться рассмотрением только нулевого приближения ОП.

6. Энергетический спектр растущего потенциала. В релятивистской КТП основные характеристики связанного состояния обычно определяются из положений полюса амплитуды перехода с соответствующими квантовыми числами. Именно этот полюс содержит непертурбативный характер взаимодействия, который вызван большой константой связи. Непертурбативный характер взаимодействия, возникающий в амплитуде перехода, определяется интегральным уравнением как уравнение Бета-Солпитера. При определении непертурбативного характера взаимодействия в рамках стандартной КТП обычно сталкиваемся с решением интегрального уравнения с произвольным ядром. Конечно, найти решения такого уравнения очень сложно. С другой стороны, интенсивно обсуждается вопрос об описании механизма формирования связанного состояния, исходящего из предположения о том, что только нелокальные взаимодействия между составляющими приводят к существованию связанных состояний. Поэтому в настоящий момент изучение механизма адронизации кварков с учетом непертурбативного характера взаимодействия представляет большой интерес.

Рассмотрим только растущий потенциал. Вклад одноглюонного обмена, т.е. векторный потенциал рассматривается как малое возмущение. Основной вклад в энергетическим спектре определяется только вкладом растущего потенциала. Поэтому, прежде всего, определим энергетический спектр растущего потенциала. Согласно (44) из условия (45) и (33) мы определим энергетический спектр внутренней системы. Энергетический спектр после некоторых вычислений и из условия осцилляторного представления определяется термом внутренней системы:

$$E_m = \frac{\omega^2}{8} + \frac{4\sigma}{\mu^2\lambda}\cdot\frac{1}{\omega} - \frac{\sigma}{\mu^2\lambda\omega}\left[4\frac{1-e^{-A}}{A} - e^{-A} + A\right], \tag{46}$$

где ω определяется из уравнения:

$$\omega + \frac{\sigma}{\mu^2\lambda}\cdot\frac{4}{\omega^2}\Bigg| \times \tag{47}$$

$$\times\left[20\frac{1-e^{-A}}{A} - 17\cdot e^{-A} - 4A\cdot e^{-A} - 3A - 4\right] = 0.$$

Здесь используется обозначение $A = \lambda R\omega$.

Теперь приступим к вычислению энергетического спектра трехглюонного связанного состояния, т.е. собственное значение полного гамильтониана, который представлен в (28). Проводя усреднение по волновой функции внутренней системы, и учитывая (32) после некоторых упрощений получаем:

$$\left\{\frac{1}{2}\vec{P}_R^2 + \frac{\sigma}{\mu^2}R + V(R) - \frac{1}{2}U\right\}k(R) = 0\,, \tag{48}$$

где $V(R)$ - дополнительный потенциал:

$$V(R) = E_m(R) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial R}\right)^2, \tag{49}$$

а E_m - хромоэлектрический потенциал, созданный хромоэлектрическим зарядом, а второе слагаемое связано с дрожжением двух составляющих. Решается это уравнения в рамках метода осцилляторного представления. Для решения проводим замену переменных:

$$R = q^{2\rho}; \quad k(R) \Rightarrow q^{2\rho l}\Phi\left(q^2\right). \tag{50}$$

Тогда модифицированное уравнение записывается в следующем виде:

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{D-1}{q}\cdot\frac{\partial}{\partial q}\right) - 2U\rho^2\cdot q^{2(2\rho-1)} + \right. \tag{51}$$

$$\left. + \frac{\sigma}{\mu^2}4\rho^2\cdot q^{2(3\rho-1)} + 4\rho^2 q^{2(2\rho-1)}V(q^{2\rho})\right]\Phi\left(q^2\right) = 0,$$

где $D = 2 + 2\rho + 4\rho l$ размерность модифицированного пространства. Согласно ОП гамильтониан представим в нормальной форме. В нулевом приближении ОП из (40) и (45) мы определяем энергетический спектр и частоту осциллятора. После некоторых упрощений для энергетического параметра имеем:

$$U = \left(\frac{\lambda^2\sigma}{\mu^2}\right)^{2/3} U_0;$$

$$U_0 = \min_{\rho}\left\{\frac{k^2\Gamma(2+\rho+2\rho l)}{4\Gamma(3\rho+2\rho l)} + \frac{2}{\lambda^2}\frac{\Gamma(4\rho+2\rho l)}{4\Gamma(3\rho+2\rho l)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2k^{3+2l}}{\lambda^2\rho\Gamma(3\rho+2\rho l)} \cdot \int_0^\infty ds \cdot s^{2+2l} e^{-(sk)^{1/\rho}} W(s)\right\}. \quad (52)$$

где k определяется из уравнения:

$$k^3 - \frac{4\rho^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\Gamma(4\rho+2\rho l)}{\Gamma(2+\rho+2\rho l)} + \frac{4k^{4+2l}}{\Gamma(2+\rho+2\rho l)} \times$$

$$\times \int_0^\infty ds \cdot s^{2(1+l)} \cdot e^{-(sk)^{1/\rho}} \left[3\rho + 2\rho l - (3k)^{1/\rho}\right] W(s) = 0.$$

Здесь

$$W(s) = \frac{\tau^2}{8} + \frac{4}{\tau} - \frac{1}{\tau}\left[4\frac{1-e^{-s\tau}}{s\tau} - e^{-s\tau} + s\tau\right] \quad (53)$$

параметр τ - определяется из уравнения как функция $\tau(s)$:

$$\tau + \frac{4}{\tau^2} \times \quad (54)$$

$$\times \left[20\frac{1-e^{-s\tau}}{s\tau} - 17e^{-s\tau} - 4s\tau \cdot e^{-s\tau} - 3s\tau - 4\right] = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бьёркен Дж.Д., Дрелл С.Д.* Т. 1. Релятивистская квантовая теория. М., 2000.
2. *Salpeter E.E.* // Phys. Rev. 1952. 87. P. 328.
3. *Alba D., Crater H.W., Lusanna L.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. 40. P. 9585-9607.
4. *Douglas G.* Currie // J. Math. Phys. 1963. 4. P. 1470.
5. *Dirac P.A.M.* // Rev Mod. Phys. 1949. 21. P. 392.
6. *Godfrey S., Isgur N.* // Phys. Rev. 1985. D 32. P. 189.
7. *Dineykhan M., Efimov G.V., Namsrai Kh.* // Fortschr. Phys. 1991. 39. 259.
8. *Feynman R.P., Hibbs A.P.* Quantum Mechanics and Path Integrals (Me Graw – Hill, New York, 1963.
9. *Dineykhan M., Efimov G.V., Ganbold G., Nedelko S.N.* Oscillator representation in quantum physics, (Lecture Notes in Physics, Springer – Verlag, Berlin, 1995). V. 26.
10. *Born M.* // Oppenheimer R., Ann. d. phys. 1927. Bd84. 457.
11. *Born M., Fock V.* // Zs. phys. 1928. Bd51. 165.
12. *Komarov I.V., Ponomarev L.I., Slavyanov S.Yu.* Spheroidal and Coulomb Spheroidal Functions (Nauka, Moscow, 1976); *Vinitski S.I., Ponomarev L.I.* // Sov Jour. Part. Nucl. 1982. 13. 557.
13. *Abramowitz M., Stegun.* Handbook of mathematical functions with formulas graphs and mathematical tables, National bureau of Standorts Applied Mathematics. Series, 1964.
14. *Solov'ev E.A.* // Usphehi Phys. Nauk. 1989. 157. 437; *Jaffe G.* // Z. Phys. 1934. 87. 535; *Beber W.G., Hasse H.R.* // Proc. Cambr. Philos. Soc. 1935. 31. 564; *Bates D.R., Ledsham K., Stewart A.L.* // R. Sos. London, Ser. A 246. 1953. 215.
15. *Fock V.A.* The Principles of Quantum Mechanics. Moscow: Nauka, 1976; Moscow: Mir, 1978.
16. *Fradkin E.S.* // Nucl. Phys. 1963. 49. 624; *Hayashi K., Hirayama M.*, et al, Fortschr. Phys. 1967. 15. 625; *Salam A.* Nonpolynomial Lagrangians. Renormalization and Gravity. Gordon and Breach Science Publ. N.Y., 1971.

Резюме

Релятивистік әсерлесуді ескере отырып, *n*- бөлшектерден тұратын релятивистік байланыс күйінің массалық спектрін анықтаудың әдісі ұсынылған. Құраушы бөлшектердің конституэнтті массалары мен массалық спектрі есептелген. Осыған қоса, осы әдіс негізінде үшглюонды байланыс күйінің – оддеронның энергетикалық спектрі есептелген. Алынған сандық нәтижелер қолда бар нәтижелермен қанағаттанарлықтай үйлеседі.

Summary

The paper suggests the method which enables to determine mass spectrum of relativistic bound state consisting of *n*-particles taking into account the relativistic character of their interaction. The mass spectrum and constituent masses of components have been calculated. In particular, in terms of this approach the energy spectrum of three – gluon bound state – odderons has been calculated. The obtained numerical results are in satisfactory agreement with the existing results.

КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 2.05.08г.