ҚР ҰғА-ның Хабарлары. Геологиялығ сериясы. Известия НАН РК.
Серия геологическая. 2006. №6. С. 36–49

УДК 556.3.012:556.342.2:532.546

В. И. ПОРЯДИН

К МЕТОДИКЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ЕСТЕСТВЕННЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПЛАСТА В УСЛОВИЯХ НЕОДНОРОДНОСТИ С ЭЛЕМЕНТАМИ ПОДЗЕМНОЙ ВОЛНОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Жер асты сулары алабының аумақтық гидродинамикалық құрылымын қолдану негізінде әр текті қабаттыңтабиғи гидродинамикалық көрсеткіштерін бағалау әдістемесін теория жкзінде дәлелдеу қаралады.

Рассматривается теоретическое обоснование методики оценки естественных гидродинамических параметров неоднородного пласта на основе использования региональной гидродинамической структуры бассейна подземных вод.

The theoretical substantiation of a technique of an estimation of natural hydrodynamical parameters of a non-uniform layer is considered on the basis of use of regional hydrodynamical structure of basin of underground waters.

Теория и методы подземной гидродинамики широко и плодотворно используются в современной гидрогеологии главным образом применительно к проблемам инженерной гидрогеологии – водо-заборам подземных вод, гидротехническим сооружениям, моделированию режима и ресурсов под-земных вод зоны интенсивного водообмена, мелиоративной гидрогеологии и др. Специфика проблем региональной гидрогеодинамики зон замедленного водообмена и «застойного» режима, для которых применимость существующей математической теории динамики подземных вод не всегда оправдана, настоятельно требует ее совершенствования.

В основе математического аппарата гидрогеологии лежат дифференциальные уравнения мате-матической физики, как правило, второго порядка, линейные относительно неизвестной функции и ее частных производных. Общий вид линейного дифференциального уравнения второго порядка при условии, что неизвестная функция u зависит от двух переменных x и y, таков [1]:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=f(x,y) \quad (1)$$

Коэффициенты могут быть как постоянными, так и переменными.

Как показано Л. Эйлером, любое дифференциальное уравнение вида (1) с помощью замены переменных x и y приводится к одному из трех типов.

1. Если $AC-\frac{B^2}{4}>0$, то после введения новых независимых переменных x и h уравнение (1) принимает эллиптический тип

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+D_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+E_1\frac{\partial u}{\partial \eta}+F_1 u=f_1(\xi,\eta),$$

простейшим видом которого при $D_1=E_1=F_1=f_1=0$ является уравнение Лапласа (уравнение потенциала)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

Решения его известны как потенциалы Лапласа или гармонические функции. При трехмерном потоке их еще называют потенциалами Ньютона, при двухмерном – логарифмическими потенциалами. Это объясняет применение терми-

[1]Казахстан. 050010, Алматы, ул. Ч. Валиханова, 94, Институт гидрогеологии и гидрофизики им. У. М. Ахдмедсафина.

на потенциал для обозначения пьезонапора и термина эквипотенциали (для изопьез).

2. Если $AC - \frac{B^2}{4} < 0$, то уравнение (1) принимает гиперболический тип

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_2 u = f_2(\xi, \eta),$$

простейшим видом которого является уравнение свободных колебаний.

3. Если $AC - \frac{B^2}{4} = 0$, то уравнение (1) принимает параболический тип

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + D_3 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_3 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_3 u = f_3(\xi, \eta),$$

примерами которого служат уравнения переноса. Уравнения гиперболического и параболического типов возникают при изучении процессов, протекающих во времени (тепломассоперенос, геофильтрация и волновые процессы).

Для описания геофильтрационных процессов в пластовых водонапорных системах регионального геологического порядка традиционно применяется *эллиптическое уравнение*. Такие системы характеризуются переслаиванием водопроницаемых и относительно водоупорных пластов с соотно-шением коэффициентов фильтрации смежных пластов порядка 10^{-5} ё10^{-10}. В этих условиях на основе предпосылки перетекания [9], основанной на законе преломления линий токов, предполагается су-ществование в слабопроницаемом пласте только вертикальной фильтрации, осуществляющей меж-пластовые перетоки между водопроницаемыми пластами, в соответствии с их потенциалами (либо вверх, либо вниз). Следовательно, существует два вида движения подземных вод: 1) латеральное – по водоносному пласту из краевой области питания к области разгрузки; 2) водообмен смежных водоносных пластов, включая и грунтовый горизонт, перетеканием через разделяющие их слабо-проницаемые пласты, что приводит при установившемся режиме – равенстве притока из области питания оттоку в области движения, к последовательно нарастающему уменьшению расхода потока пластовой водонапорной системы в целом в области разгрузки. Примером его является уравнение А. Н. Мятиева [9], принимающего для случая одномерного движения вдоль оси x вид [10]

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = B^2 (H - H^*), \qquad (2)$$

с решением в виде

$$H = H^* + (H_0 - H^*) e^{-Bx}, \qquad (2а)$$

где $B^2 = \frac{K_0}{m_0 m K}$, B – коэффициент перетекания; K_0, K – коэффициенты фильтрации водоупора и водоноснного пласта, m_0, m – их мощности, соответственно; $H = H_0$ – напор при $x = 0$; H^* - напор при x®ө.

Задачу А. Н. Матиева можно усложнить и определить не только закон изменения напора, но и закон изменения плотности потока - удельного расхода, или модуля подземного стока. С этой целью воспользуемся решением задачи движения жидкости и газа по трубам с проницаемыми стенками, осуществленным в 1927 г. А. С. Лейбензоном [7], которая, как нам представляется, явилась образцом для исследования геофильтрационной задачи с перетеканием, выполненной в 1946 г. А. Н. Мятиевым.

В основу решения положим два постулата: 1) потеря напора на единицу длины пласта - dH/dx при ламинарном движении жидкости по пласту и модуль подземного стока q связаны законом Дарси

$$-\frac{dH}{dx} = wq;$$

2) изменение модуля подземного стока на участке пласта длиной dx пропорционально давлению жидкости в данном месте пласта H

$$-\frac{dq}{dx} = bH,$$

где $w = 1/K$ – гидравлическое сопротивление, размерностью $L^{-1}T$, [4], b – параметр, характери-зующий потери модуля подземного стока q на участке пласта длиной dx в единицу времени dt, размерностью $L^{-1}T^{-1}$. После исключения H или q из обоих уравнений получим

$$\frac{d^2 q}{dx^2} = B^2 q \quad \text{и} \quad \frac{d^2 H}{dx^2} = B^2 H, \qquad (3)$$

где $B^2 = wb$ – параметр, тождественный аналогичному параметру задачи А. Н. Матиева, размерностью L^{-2}. Уравнения (3) служат для решения стационарной задачи. Их интегралы содержат соответственно две постоянные, которые определяются из двух граничных условий: в начале пласта (x = 0) имеем входной удельный расход $q = q_0$; там же значение напора в жидкости на входе пласта равно $H = H_0$. Следовательно, имеем два начальных условия при $x = 0$: $-\frac{dq}{dx} = bH_0$ и $-\frac{dH}{dx} = wq_0$.

Простое линейное уравнение второго порядка (3) относительно удельного расхода (плотности потока) интегрируется в гиперболических функциях:

$$q = C_1 \mathrm{ch}(Bx) + C_2 \mathrm{sh}(Bx),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Внося в уравнение первое начальное условие, получим $C_1 = q_0$, затем, внося в уравнение второе начальное условие, получим $-bH_0 = C_2 B$. Внося теперь полученные результаты в интеграл, имеем закон уменьшения расхода

$$q = q_0 \mathrm{ch}(Bx) - \frac{bH_0}{B} \mathrm{sh}(Bx). \tag{4}$$

Уравнение второго порядка (3) относительно напора интегрируется также в гиперболических функциях

$$H = C_1' \mathrm{ch}(Bx) + C_2' \mathrm{sh}(Bx), \tag{5}$$

где C_1¥, C_2 ¥ - произвольные постоянные. Внося в уравнение первое начальное условие, $H = H_0$ при $x = 0$, получаем C_1¥$= H_0$. Дифференцируя (10) по x и используя второе начальное условие, $-\frac{dH}{dx} = wq_0$, получаем $-wq_0 = C_2' B$. Внося теперь полученные результаты в (5), имеем закон падения напора

$$H = H_0 \mathrm{ch}(Bx) - \frac{wq_0}{B} \mathrm{sh}(Bx). \tag{6}$$

Для контроля решения примем на непроницаемых границ пласта – водоупорах условие b®0, откуда следует B®0. Тогда имеем $\lim \mathrm{ch}(Bx)_{B\to 0} = 1$ и $\lim \mathrm{sh}(Bx)_{B\to 0} = Bx$. Следовательно,

$$H_0 - H = wq_0 x,$$

и мы получили уравнение Стокса, отвечающее закону падения напора при режиме течения Пуазейля.

Для определения значения абсциссы, где напор обращается в нуль, $H = 0$, имеем

$$\mathrm{th}(lB) = \frac{H_0}{q_0}\sqrt{\frac{b}{w}}. \tag{7}$$

Поскольку гиперболический тангенс меньше единицы, следовательно,

$$\frac{H_0}{q_0}\sqrt{\frac{b}{w}} < 1, \tag{8}$$

но именно это имеет место, так как b - малая величина. Внося значение

$$\frac{q_0 B}{b} = q_0\sqrt{\frac{w}{b}}$$

в законы поведения напора (6) и расхода (4) на границах пласта, получаем

$$H = H_0 \frac{\mathrm{sh}[(l-x)B]}{\mathrm{sh}(lB)} \quad \text{и} \quad q = q_0 \frac{\mathrm{ch}[(l-x)B]}{\mathrm{ch}(lB)}. \tag{9}$$

В точке $x = l$, где напор иссякнет, $H = 0$, расход равен

$$q = \frac{q_0}{\mathrm{ch}(lB)}. \tag{9a}$$

Для определения абсциссы $x = l$, где иссякнет удельный расход, нельзы пользоваться условием $q = 0$, так как в этом случае получим из (4)

$$q_0 \mathrm{ch}(Bx) = \frac{bH_0}{B} \mathrm{sh}(Bx), \text{ или } \mathrm{th}(lB) = \frac{q_0}{H_0}\sqrt{\frac{w}{b}} > 1,$$

что находится в противоречии с (7), (8). В силу сказанного определим абсциссу $x = l$ исходя из условия q ® 0, что возможно, если в (9) $\mathrm{ch}(lB)$ ®ө. Это произойдет при условии (lB) ® ®230,2585, что дает величину $\mathrm{ch}(lB)$ » 4,9999·10^{99} » ө. Следовательно, $q = \frac{q_0}{4.9999 \cdot 10^{99}} \approx 0$. Таким образом, условие $x = l$ при q ® 0 определяется выражением

$$l_{q\,®\,0} = 230{,}2585/B,$$

зависящим от параметра перетекания (см. табл.): уменьшение интенсивности перетекания – до наименьшего значения В = 1·10^{-6} *м*$^{-1}$ способствует увеличению расстояния до l = 230 258,5 *м* и, наоборот, увеличение интенсивности перетекания до наибольшего значения В = 9,9·10^{-6} *м*$^{-1}$ способствует уменьшению расстояния до l = 73 181 *м*. Существование потока подземных вод за пределами этих расстояний обеспечивается дополнительным инфильтрационным питанием и потоками с возвышенных территорий на пути как геофильтрации, так и обрамляющих геоструктур.

Отметим, однако, что согласно молекулярно-кинетической теории вещества плотность потока q не может быть равной нулю, а ее минимальное значение определяется предельной проницаемостью материала. Ее можно оценить, используя межатомное расстояние $d \sim 10^{-8}$ *см*. Именно квадрат последнего и определяет предельное значение проницаемости $k_{0пред} \sim 10^{-16}$ *см*^{2} (гранит, бетон, [4]). Согласно закону Дарси $u = K_{0пред}$ I = ($k_{0пред}$ rg/m)I, где $K_{0пред} = k_{0пред}$ rg/m, проницаемости $k_0 = K_0$m/rg $=10^{-8}$*см*^{2} = 1 *дарси* [4] и градиенту напора I = 1 соответствует скорость фильтрации пресной воды (m = 1*спз*; $g = rg$ =1*Г*/*см*^{3}) 1 *м*/*сут*. Следовательно, предельные значения для водоупорных пород оказываются равными: для проницаемости $k_{0пред} = 10^{-16}$ *см*^{2}= = 10^{-8} *дарси*, для коэффициента фильтрации $K_{0пред} = k_{0пред}$ rg/m=10^{-8} *м*/*сут*. Поскольку межпластовое перетекание происходит при градиенте напора I ~ 1, поэтому предельное значение скорости фильтрации, в том числе для водоупорных пород, может составлять величину $u_{пред} \sim 10^{-8}$ *м*/*сут*~ 10^{-13} *м*/*с* (q=10^{-4} *л*/*с*·*км*^{2}). Вместе с тем, как показано [2], предельное значение скорости фильтрации определяется существованием начального градиента фильтрации и составляет $u_{пред} \sim 10^{-12}$ *м*/*с* (q=10^{-3} *л*/*с*·*км*^{2}), что на порядок больше выше приведенной оценки.

При изучении нестационарных процессов *переноса*, протекающих во времени (тепломассоперенос и геофильтрация, волновые процессы) используют *уравнения параболического и гиперболического типов*. Уравнения переноса *параболического типа*, объединяют такие природные явления, как диффузия (молекулярный перенос масс), теплопроводность (молекулярный перенос энергии) и вязкость – внутреннее трение (молекулярный перенос импульса) [6]. Во всех случаях происходит выравнивание свойств тела, если первоначально эти свойства (состав, температура или скорость течения) были неодинаковы в разных местах тела; тем самым происходит приближение к состоянию равновесия, характерного для необратимых процессов переноса.

Математической моделью необратимых процессов переноса субстанции: тепла (энергии), массы (вещества) и импульса (количества движения) является уравнение [3]

$$\frac{1}{a}\frac{dQ}{dt} - \Delta Q = \frac{1}{a}w\,, \qquad (10)$$

где Q и w – плотность переносимой субстанции и мощность ее источников соответственно; D – лапласиан; a – параметр, характерный для данного явления переноса; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\upsilon \mathrm{grad})$ – полная производная по времени (локальное изменение во времени и конвективный перенос).

Уравнение (10) следует из гипотезы переноса (законы Фурье, Фика, Дарси, Ома)

$$\mathbf{q} = -a\,\mathrm{grad}\,Q\,,$$

где **q** – плотность потока субстанции, предполагающей бесконечность скорости распространения субстанции и закона сохранения, записанного в дифференциальной форме,

$$w = -\frac{dQ}{dt} = \mathrm{div}\,\mathbf{q}.$$

Математической моделью геофильтрационного процесса для общего случая сжимаемой геофильтрационной среды является уравнение консолидации Терцаги - аналог уравнений теплопроводности и диффузии [4], описывающее неустановившееся пространственно-временное поведение эффективного (избыточного гидростатического по Терцаги) давления p

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}\,, \qquad (10а)$$

где $a = k / \mu(n\beta_ж + \beta_c)$ $=k/mb^*$ - коэффициент пьезопроводности (для однородно-изотропной среды); $b_ж$, b_c, b^*- сжимаемость жидкости, скелета пористой среды фильтрации, а также породы в целом размерностью am^{-1}; k - проницаемость пласта; m - динамическая вязкость воды, или ввиду того, что ¶H/¶t » ¶p/g¶t [4], имеем

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a\frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2} \qquad (10б)$$

где H – напор; $a = K / \gamma(n\beta_ж + \beta_c)$ $=K/gb^*$- коэффициент пьезопроводности; K – коэффициент фильтрации пласта; g -плотность пластовой воды; S = K/a = g($nb_ж$+ b_c) = gb^* =b - удельная водоемкость пласта (размерность L^{-1}), т.е. объем воды высвобождаемый (поглощаемый) единицей объема породы при снижении (повышении) напора (давлениия) на одну единицу.

Классические пространственно-временные решения уравнений (10а), (10б) методом Фурье в виде сходящихся рядов синусоид (или косинусоид) с затухающими амплитудами [1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,t) = \alpha_n \sin(\lambda x)\exp\left(-\lambda^2 at\right) \text{ и}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,t) = \alpha_n \sin(\lambda x)\exp\left(-\lambda^2 at\right) \qquad (11)$$

(l=np/l, n = 0,1,2…, ctg$l$$l$ = 0,a_n - коэффициенты) возможны в предположении независимости коэффициента пьезопроводности от давления (напора) и координат, т.е. однородности и изотропности геофильтрационной среды, чего нет в действительности; по этой причине эти решения имеют лишь качественный характер.

Для пространственно неоднородной среды используем другой подход. Преобразуем уравнение (10б) на основе гипотезы: напор падает со временем t по закону [7]

$$H = H_0 e^{-\nu t}, \qquad (12)$$

где n =1/t - коэффициент затухания или частота водообмена, t - период водообмена или время конвективной геологической релаксации массопереноса [12]. Следовательно, производная по времени запишется выражением

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} H, \qquad (12а)$$

показывающим, что скорость уменьшения напора при течении вязкой жидкости пропорциональна напору H и определяется убылью потенциала во времени по экспоненте.

Подставляя значение производной в уравнение (11), получаем (для одномерного случая фильтрации в направлении оси x) линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{1}{a\tau} H. \qquad (13)$$

Его решение аналогично решению уравнений (3) с мнимым аргументом, $xB = x\sqrt{-1/a\tau}$,

$$H = H_0 \mathrm{ch}(x/\sqrt{-a\tau}) - \frac{wq_0}{\sqrt{-1/a\tau}} \mathrm{sh}(x/\sqrt{-a\tau})$$

и $$q = q_0 \mathrm{ch}(x/\sqrt{-a\tau}) - \frac{bH_0}{\sqrt{-1/a\tau}} \mathrm{sh}(x/\sqrt{-a\tau}). \qquad (3а)$$

Преобразуя (4,6) (3а), получаем уравнения "квазигармонических колебаний" для напора и удельного расхода

$$H = H_0 \cos(x/\sqrt{a\tau}) - wq_0\sqrt{a\tau}\sin(x/\sqrt{a\tau})$$

и $$q = q_0 \cos(x/\sqrt{a\tau}) - bH_0\sqrt{a\tau}\sin(x/\sqrt{a\tau}), \qquad (3б)$$

где $x/\sqrt{a\tau} = \mathrm{Pe}_\tau = xc/a = 1/\mathrm{F}_{0\tau}^{1/2}$ - релаксационное число или безразмерная скорость передачи сигнала Пекле; $\mathrm{F}_{0\tau} = a\tau/x_0^2$ - число Фурье или безразмерное время релаксации; x_0 – характерный размер; c – скорость передачи сигнала (скорость звука).

Наиболее наглядно "квазигармонический" характер поведения напора и удельного расхода виден в формах

$$H = H_0 \cos(\sqrt{\omega t}) - wq_0\sqrt{a\tau}\sin(\sqrt{\omega t})$$

и

$$q = q_0 \cos(\sqrt{\omega t}) - bH_0\sqrt{a\tau}\sin(\sqrt{\omega t}), \qquad (3в)$$

$$H = H_0 \cos(\mathrm{Pe}_\tau) - wq_0\sqrt{a\tau}\sin(\mathrm{Pe}_\tau)$$

и

$$q = q_0 \cos(\mathrm{Pe}_\tau) - bH_0\sqrt{a\tau}\sin(\mathrm{Pe}_\tau), \qquad (3г)$$

где w = 2pn - частота водообмена, $\mathrm{Pe}_\tau = x/\sqrt{a\tau}$ - число Пекле.

На основе сопоставления уравнений (2), (3), (13) можно записать для регионального *квазистационарного* геофильтрационного процесса фундаментальное соотношение, связывающее параметр перетока B с пьезопроводностью a и временем конвективной геологической релаксации массопереноса t геофильтрационной среды

$$B^2 = \left|\frac{1}{a\tau}\right|, \qquad (14)$$

с учетом которого выражение числа Пекле приобретает вид

$$\mathrm{Pe}_\tau = x/\sqrt{a\tau} = xB. \qquad (15)$$

Отметим, что совокупность уравнений (3а)-(3в), (12) аналогична классическому решению уравнения (11). Вместе с тем сопоставление уравнений (3б), (11)–(14) позволяет, с одной стороны, установить связи параметров показателей экспонент и аргументов тригонометрических функций: B=l (поскольку 1/tҒl^2a, $\lambda = 1/\sqrt{a\tau}$), а с другой – оценить на основе экспериментальных данных (см. табл.) величину числа n в уравнении

(11) с учетом x ғ l, $n = Bx/\pi = Pe_r/\pi \approx 0{,}004 \div 0{,}5$, что совершенно несоответствует теоретическим значениям $n = 0,1,2\ldots$ в уравнениях (11). Это свидетельствует, как нам представляется, о неприменимости классического решения (11) к региональным геофильтрационным процессам в неоднородных средах.

Особенностью *параболического уравнения* является принятие бесконечно большой (мгновенной) скорости распространения эффекта возмущения параметра Q в (10) в любой точке поля, что физически невозможно. Это происходит в связи с неучетом в параболическом уравнении инерционного члена переноса, т.е. неучета соответствующих времен релаксации переноса $\tau = a/c^2$. Следовательно, уравнение переноса Дарси с учетом явления релаксации приобретает вид [3,8,12]

$$\mathbf{q}(x,y,t) = -\mathrm{grad}\,Q(x,y,t) - \tau\frac{\partial \mathbf{q}(x,y,t)}{\partial t}, \qquad (16)$$

где c – скорость передачи гидрогеодинамического возмущения в геофильтрационной среде (скорость звука). Легко видеть, что только при $c \to \infty$ классический закон Дарси вытекает из последнего выражения. Поскольку величина τ для тепла обычно очень мала, ~ 10^{-9} –10^{-11} c [8], а для фильтрационной дисперсии, напротив, очень велика, ~ 10^{10} –10^{13} c [12], (см. табл.), ясно, что поправка $\tau d\mathbf{q}/dt$ существенна, когда величина $d\mathbf{q}/dt$ либо достаточно велика - при рассмотрении тепломассопереноса, либо очень мала - при рассмотрении региональной геофильтрации.

Принятие закона (16) приводит к *гиперболическому уравнению переноса*, описывающим про-цесс распространения колебаний [3],

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{a}\frac{dQ}{dt} = \Delta Q + \frac{1}{a}w + \frac{1}{c^2}\frac{dw}{dt}, \qquad (17)$$

где $Q(x, y, t)$ - глубина, либо половина квадрата глубины, либо напор подземных вод; $w(x, y, t)$ – интенсивность инфильтрации или количество просачивающейся воды на единицу площади в единицу времени; a - коэффициент уровне- или пьезопроводности; Δ - лапласиан; $c = \sqrt{a/\tau}$ - скорость распространения звука, которая при $\tau \neq 0$ отлична от бесконечности.

Гиперболическое уравнение переноса отличается от параболического двумя новыми слагаемыми. Первое $\frac{1}{c^2}\frac{d^2Q}{dt^2}$ отражает тот факт, что процесс переноса в действительности носит не параболический, а гиперболический, т.е. волновой характер. Второе, $\frac{1}{c^2}\frac{dw(x,y,t)}{dt}$), показывает, что на баланс субстанции оказывают влияние не только мощность источника, но и полное изменение этой мощности во времени. Следовательно, модель фильтрации параболического типа заменяется на модель, более емкую и более адекватную, содержащую факт конечности скорости передачи гидрогеологического возмущения в фильтрующейся среде. Это уравнение описывает уже волновые, а не только чисто диссипативные, стремящиеся к выравниванию, процессы [3].

Отметим, еще раз, что параболическое уравнение (10) отражает парадокс: скорость распространения возмущения равна бесконечности, что физически невозможно. Это неверно, прежде всего, потому что, как доказывается в теоретической гидродинамике, процесс распространения взаимодействий является мгновенным лишь в несжимаемой жидкости - в сжимаемой жидкости он конечен и равен скорости звука. Однако и жидкость, и геофильтрационная среда в параболическом уравнении рассматриваются сжимаемыми, как это и есть в действительности, которая учитывается коэффициентом пьезопроводности, включающим упругоемкость пласта. Следовательно, подземная гидродинамика сжимаемой геофильтрационной среды и жидкости фактически должна описываться уравне-нием гиперболического типа, т.е. волновым уравнением. А это означает, что нельзя игнорировать инерционный член в гидродинамическом уравнении Эйлера, а используемые в настоящее время параболические и эллипитические уравнения - упрощенный подход к подземной гидродинамике.

Заметим, что условие конечности скорости распространения возмущения (воздействия) в виде волн можно получить также из решения нелинейного параболического уравнения при $a(Q) \to 0$ [8]

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(Q)\frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

При оценке доминирования в уравнении (17) гиперболических или параболических свойств полезно перейти к безразмерным переменным. В этом случае вопрос сводится к оценке релаксационноги числа Пекле [3]

$$Pe_t = F_{ot}^{1/2} = \frac{x}{\sqrt{a\tau}} = \frac{x_0 c}{a}, \qquad (18)$$

т.е. к оценке безразмерной скорости передачи сигнала: при $Pe_t >> 1$ по (18) справедливы уравнения (10), (10а), (10б); при $Pe_t << 1$ по (18) - волновое уравнение

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2Q}{dt^2} = \Delta Q + \frac{1}{c^2}\frac{dw}{dt}, \qquad (19)$$

при $Pe_t \sim 1$ по (18) – уравнение (17).

Обратимся к аналитическому определению параметров эллиптического, параболического и гиперболического уравнений, используя региональную гидродинамическую структуру подземных вод.

Формирование гидродинамической структуры региональных потоков подземных вод, отображаемых гидродинамической сеткой – взаимосвязанной системой эквипотенциалей и ортогональных к ним линий тока, обусловлено сложным взаимодействием процессов питания и разгрузки подземных вод, описываемых дифференциальми уравнениями либо эллиптического (стационарного), либо параболического (нестационарного), либо, наконец, гиперболического (волнового), типов, составляющих вместе с начальными и краевыми условиями основы математических моделей.

При этом, если процессы питания подземных вод определяются преимущественно гидрометеорологическими условиями территории региона, то процессы разгрузки подземных вод контролируются исключительно гидродинамическими параметрами как самого, так и смежных с ним пластов (в подошве и кровле) и разделяющих их «водоупоров», образующих в целом пластовые водонапорные системы. И те, и другие процессы, а следовательно, и гидродинамическая сетка являются функциями пространственно-временных координат.

Интенсивность питания интегрально представляется модулем подземного стока, изначально формирующим естественные ресурсы подземных вод, а «модуль» разгрузки также интегрально детерминирован коэффициентом перетекания, который определяется из решения эллиптического дифференциального уравнения. Следовательно, три исходных параметра гидрогеологической системы (геофильтрационной среды): модуль подземного стока, модуль разгрузки и гидродинамическая сетка в совокупности с конкретным дифференциальным уравнением, а также граничными и начальными условиями, определяющими единственность его решения, вполне достаточны для определения гидродинамических параметров пласта и вертикального водообмена (инфильтрацию и межпластовые перетоки).

Такие оценки особенно существенны в условиях неоднородности пластовых водонапорных систем, когда пространственно-временное описание функции напора невозможно в виде непрерывной функции – она оказывается кусочно-непрерывной. Отсюда следует, что вместо рассмотрения непрерывно изменяющегося напора подземных вод во времени и пространстве следует рассматривать его изменения в отдельнах промежутках пласта D*x* и через определенные интервалы времени D*t*. В итоге процесс фильтрации для интервалов времени рассматривается по уравнению Дарси путем численного решения дифференциальных уравнений фильтрации в конечных разностях. Подобное рассмотрение включает, таким образом, сочетание конечностно-разностного метода с анализом гидродинамической сетки.

Наиболее значимыми неродностями геофильтрационной среды являются мега-, макро- и мезо-неоднородности, выражающаяся в изменении показателей ее проницаемости и емкости в локально-региональном геологическом пространстве-времени, менее значимы микронеоднородности. Этим неоднородностям сопоставляются соответственно региональные мега-, макро- и мезопотоки подземных вод как пространственно-временное отражение региональной гидродинамической структуры бассейна подземных вод [5]. Вместе с тем понятие геофильтрационной неоднородности математически относительно: среда может быть принята за однородную или неоднородную в зависимости от соотношения размеров элементов неоднородностей и сферы их влияния. Для региональных потоков наиболее характерна упорядоченная, закономерно изменяющаяся, как правило, экспоненциальная, неоднородность.

Геофильтрационная среда помимо ее неоднородности в общем случае принимается сжимаемой по основным ее фазам: жидкости $b_{ж}$ и скелета пористой среды фильтрации $b_{с}$, а также породы в целом b^{*}, с уравнениями состояния

$$dn = b_{с}dp;\ dr/r = b_{ж}\ dp.$$

В этом общем случае связь плотности r и давления p нелинейна. Упругая емкость водонасыщенных пород определяется как отношение изменения объема воды DW к объему породы V, отнесенное к единичному изменению напора gDH, либо по [16] с размерностью $ат^{-1}$,

$$b^{*} = nb_{ж} + b_{с},$$

либо по [4, 15] с размерностью L^{-1},

$$\text{е} = \text{D}W/Vg\text{D}H = g\ [nb_{ж} + (1\text{-}n)a_{с}] = $$
$$= g(nb_{ж} + b_{с}) = gb^{*} = b. \qquad (20)$$

Упругая водоотдача (насыщение) характеризует то количество свободной воды D$V_{в}^{*}$, которое может быть отдано (получено) объемом пласта площадью F и мощностью m за счет проявления его упругих свойств b^{*} при изменении напора (давления) на gDH = DP:

$$\text{D}V_{в}^{*} = gb^{*}\ mF\text{D}H.$$

Следовательно, для единичного элемента пласта коэффициент упругой водоотдачи пласта равен

$$m^{*} = \text{D}V_{в}^{*}/\text{D}H = gb^{*}m,$$

а коэффициент пьезопроводности (m - динамическая вязкость воды) –

$$a = Km/m^{*} = K/gb^{*} = K/\text{g}(nb_{ж} + b_{с}) = k/m\ (nb_{ж} + b_{с}). \quad (21)$$

В соответствии с классическим уравнением Дарси изменению коэффициента фильтрации K геофильтрационной среды соответствует определенное изменение скорости фильтрации u или плотности потока q и градиента напора I, скорости перераспределения напоров или скорости упругого насыщения (осушения) - пьезопроводности a, сжимаемости среды b (b^{*}), удельной упругоемкости е и безразмерного коэффициента упругой водоотдачи m^{*}, а также скорости распространения возмущений - скорости звука c.

Традиционно определение геофильтрационных параметров пород и пласта осуществляется постановкой длительных, дорогостоящих полевых опытно-фильтрационных работ (ОФР), включающих пространственно-временной мониторинг поведения напоров в депрессионных воронках опытно-эксплуатационных и наблюдательных скважин, что с точки зрения теории фильтации представляет решение обратных задач. Параметры определяются аналитическими, графоаналитическими методами и моделированием. Однако в этом случае фактически определяются «техногенные» параметры пород и пласта, так как перечисленные выше методы основаны на использовании данных ОФР, проводимых в условиях интенсивной принудительной гидродинамики пласта, существенно отличающейся от естественной.

Действительно, величина подземного водообмена, контролируемая преимущественно модулем подземного стока, изменяется в пределах, как правило, 0,1–5 *л/с·км*², реже больше – до 10 *л/с·км*², или меньше – до 0,01 *л/с·км*², что обеспечивает скорости движения подземных вод не более 10^{-3} *м/сут*, но не менее 10^{-6} *м/сут*. Следовательно, доля («концентрация») подземной воды, участвующей в подземном инфильтрационном водообмене, составляет крайне малую величину ~ 10^{-5} *д. ед.* (модуль 1 *л/с·км*²) и менее, что, как правило, значительно меньше интенсивности эксплуатации подземных вод при проведении ОФР и водоснабжении.

Итак, для определения геофильтрационных параметров воспользуемся нестационарным дифференциальным уравнением второго порядка Буссинеска, являющимся наиболее общпринятой матема-тической моделью геофильтрации. Для изотропных сжимаемых сред с питанием оно имеет вид [4]

$$\text{div}(T\text{grad}H) = S¶H/¶t\ \text{-}\ e, \qquad (10в)$$

где $T = Km$- водопроводимость, S ғ $m^{*} = \text{g}m(nb_{ж} + \text{a}) = gmb^{*}$- безразмерные коэффициент водоемкости [4] или коэффициент упругой водоотдачи пласта ($b_{ж}$ - коэффициент сжимаемости воды, a – коэффициент уплотнения скелета пласта, n – эффективная пористость), e - модуль питания за счет перетекания из соседних водоносных горизонтов через слабопроницаемые пласты.

Для однородных сред имеем

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon}{T} = \frac{S}{T}\frac{\partial H}{\partial t}\ , \qquad (10г)$$

где T/S ғ a – пьезопроводность (диффузивность) пласта или его коэффициент уплотнения (набухания).

Преобразуем исходное уравнение Буссинеска

(10г) двояко. Во-первых, введением гипотезы - напор падает со временем по закону [7]

$$H = H_0\, e^{-\nu t},$$

уравнение Буссинеска преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon}{T} = -\frac{S\nu}{T} H \ ,$$

а в отсутствие питания (*e* = 0 или его малости, *e*®0) упростится до выражения

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{S\nu}{T} H = 0 \ .$$

Обозначая *S*n/*T* = l^2, получаем

C^2*H* + l^2*H* = 0,

Поскольку l^2 < 0, то имем

C^2*H* + l^2*H* = 0,

т.е. аналог уравнения (13) с решением (4,6), где l^2 ғ *B* = -1/*at*.

Во-вторых, замена производной по времени на производную по координате с использованием соотношения ¶*H*/¶*t* = - *K*¶*H*/¶*x* (на основе закона Дарси и принципа размерности физических величин) дает

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon}{T} = -\frac{KS}{T}\frac{\partial H}{\partial x} \ .$$

Для случая отсутствие питания (*e* = 0 или его малости, *e*®0) имеем

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -\frac{kS}{T}\frac{\partial H}{\partial x} \ .$$

Понижая порядок дифференциального уравнения, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{KS}{T} H \ .$$

В результате интегрирования имеем зависимость напора от расстояния (аналог гипотезы Лейбензона (12) с заменой *t* на *x* , *a*/*K* = *T*/*KS* на *t*)

$$H = H_0 e^{-\frac{K}{a}x} \text{ или } H = H_0 e^{-\frac{KS}{T}x} , \qquad (12а)$$

где *a*/*K* =*L* – характерное расстояние проникновения в водонапорную систему одного цикла водообмена [12]. Следовательно, на расстоянии $x = L$ имеем, $H = H_0 e^{-1}$, т.е. уменьшение исходного напора в *e* = 2,718… раз, что характерно для релаксирующего процесса переноса, стремящегося к равновесному состоянию.

На основе (12а) запишем выражение градиента напора

$$\mathrm{grad} H = -\frac{K}{a} H \ .$$

После умножения обеих частей градиента напора на *K* получим выражение

$$K\left|\mathrm{grag} H\right| = \frac{K^2 H}{a} = 10^{-9} q \ , \qquad (22)$$

из которого имеем

$$K\left|\mathrm{grag} H\right| = 10^{-9} q \ . \qquad (22а)$$

Следовательно, из (22а) определится коэффициент фильтрации

$$K = 10^{-9} q / \,\mathrm{grad} H \ . \qquad (22б)$$

Выражение (22) можно представить также к виду

$$\frac{K^2 H}{a} = 10^{-9} q = u, \qquad (22в)$$

откуда с учетом (22б) определяется коэффициент пьезопроводности

$$a = \frac{10^9 K^2 H}{q} = \frac{10^{-9} qH}{(\mathrm{grad} H)^2} = \frac{KH}{\mathrm{grad} H} \ . \qquad (23)$$

Обратимся к определению упругоемкости водонасыщенной породы *b**, для чего сравним выражения пьезопроводности (21) и (23):

$$a = \frac{Km}{\mu^*} = \frac{K}{\gamma\beta^*} \text{ и } a = \frac{KH}{\mathrm{grad} H} \ .$$

Приравнивая оба выражения пьезопроводности, получаем

$$\frac{KH}{\mathrm{grad} H} = \frac{K}{\gamma\beta^*} \ .$$

Из последнего равенства, после сокращения на *K* следуют выражения упругоемкости водонасыщенной породы на основе анализа параметров *i*-ячейки гидродинамической сетки, размерностью am^{-1},

$$\beta_i^* = \frac{\mathrm{grad} H_i}{\gamma_i H_i} \qquad (24)$$

или размерностью L^{-1}

$$\beta_i = \frac{\mathrm{grad} H_i}{H_i} = \Sigma_i \ , \qquad (24а)$$

где e_i = $n \cdot 10^{-6}$ $м^{-1}$ – *удельная водоемкость пласта* (20), т.е. объем воды, высвобождаемый (поглощаемый) единицей объема породы при снижении (повышении) напора на одну единицу [4].

Для постоянного значения коэффициента упругоемкости водонасыщенной породы в пределах элементарной ячейки гидродинамической сетки $b_i^* = \text{const}$ получим (без учета межпластовых перетоков, т.е. глубинного водообмена) выражение

$$H_i = H_{0i}\exp(-b_i^* g_i\, l_i). \qquad (12б)$$

Используя (12а), где $b_i = K_i/a_i$ – коэффициент упругой емкости пласта (размерность L^{-1}), и преобразуя его применительно к элементарной ячейке гидродинамической сетки к виду

$$H_i = H_{0i}\exp(-K_i\, l_i/a_i), \qquad (12в)$$

получаем выражение для определения упругоемкости водонасыщеннго пласта размерностью am^{-1}

$$b_i^* = K_i/g_i\, a_i, \qquad (24б)$$

в отличие от $b_i = K_i/a_i = e_i$ - удельной упругоемкости пласта размерностью L^{-1}. Следовательно, имеем простую связь пьезопроводности, упругоемкости, коэффициента фильтрации пласта $K_i = \text{const}$ и пластовой воды постоянной плотности $g_i = \text{const}$

$$b_i^* a_i = \text{const}^*, \text{ или } b_i a_i = \text{const},$$

где $\text{const}^* = K_i/g_i$, $\text{const} = K_i$, т. е. функциональная связь пьезопроводности и упругоемкости взаимно обратна, что видно уже из выражения пьезопроводности $a = K/gb^*$. Поэтому можно не прибегать к сравнению формул (21) и (23), а непосредственно использовать выражения $b = K/a$ и $a = \dfrac{10^{-9} qH}{(\mathrm{grad}H)^2}$ в форме $a = \dfrac{KH}{\mathrm{grad}H}$, откуда следует $\beta = \dfrac{\mathrm{grad}H}{H} = \Sigma$.

Обратимся к определению скорости распространения возмущения в пласте. Прежде всего выясним связь пространственно-временных масштабных коэффициентов макро- и микропереноса (молярного и молекулярного переносов соответственно [8]).

Процессы переноса объединяют не только линейность уравнений переноса (законы Дарси, Фурье, Фика, Ома), но и молекулярно-кинетическую основу процессов, приводящую к необратимому выравниванию свойств в системе. Так, в потоке жидкости, не только свободной, но и в пределах гео-фильтрационной среды, тем более неоднородной и сжимаемой, скорость течения различна в разных местах. Такое состояние жидкости является неравновесным и в ней происходит процесс выравнивания скорости – процесс внутреннего трения, который для жидкости именуется *вязкостью*. Подобно тому, как при теплопроводности возникает поток тепла - кинетической энергии, из более нагретых участков среды в менее нагретые, так и при внутреннем трении благодаря тепловому движению молекул происходит передача импульса от более быстрых участков потока, где кинетическая энергия молекул больше, к менее быстрым. В квазикристаллической структуре воды процесс переноса импульса аналогичен диффузии и характеризуется двумя величинами: *дрейфовой скоростью* [6]

$$u \sim Fd/mu_{\text{т}} = gt_{\text{o}}$$

в направлении действия силы поля тяжести $F = mg$ в течение времени свободного пробега t_{o} (время микрорелаксации)

$$t_{\text{o}} \sim d/u_{\text{т}}$$

($d \sim 10^{-10}$*м* – межмолекулярное расстояние, $u_{\text{т}}$ – скорость теплового движения молекул воды в квази-кристаллической ее структуре) и *подвижность* молекул воды [6,14]

$$J = d/mu_{\text{т}},$$

обратная величина которой в соответствии с законом трения Ньютона характеризует *вязкость*

$$h = 1/J = mu_{\text{т}}/d.$$

Время геологической макрорелаксации в случае геофильтрации определяется формулой *периода водообмена – временем конвективной геологической релаксации массопереноса* [12]

$$\tau = 10^9 \cdot \frac{h}{q}, \qquad (25)$$

которое можно преобразовать относительно *модуля подземного стока* (*плотности потока или скорости макропереноса*)

$$10^{-9} q = h/\text{t} \qquad (25а)$$

(h –мощность водоносного горизонта, 10^{-9} – числовой коэффициент перехода от размерности плотности потока, *л/с·км*^{2}, к скорости потока, *м/с*).

Введем масштабные коэффициенты:

линейный

$$m = \frac{h}{\delta} \qquad (26)$$

и временной

$$n = \frac{\tau}{\tau_0}. \qquad (27)$$

Используя масштабные коэффициенты (26),

(27), преобразуем выражение периода водообмена (25) в соотношение скоростей макропереноса $u = 10^{-9}q$ и звука $c = d/t_0$ к виду

$$\frac{\upsilon}{c} = \frac{m}{n}. \qquad (28)$$

Далее, по аналогии с выражением скорости звука

$$c = \sqrt{a_0/\tau_0} \qquad (29)$$

запишем выражение скорости массопереноса

$$\upsilon = \sqrt{a/\tau}. \qquad (30)$$

Составим отношение квадратов скоростей (29), (30)

$$\frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{a}{a_0}\cdot\frac{\tau_0}{\tau}. \qquad (31)$$

Обозначая $a = h^2/t$ и $a_0 = d^2/t_0$, получаем соотношение параметров переноса в виде отношения масштабных коэффициентов

$$\frac{a}{a_0} = \frac{m^2}{n}, \qquad (32)$$

Подставляя выражение (32) в соотношение квадратов скоростей (31), получаем выражение

$$\frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{a}{a_0}\cdot\frac{\tau_0}{\tau} = \frac{m^2}{n^2},$$

откуда следует полученное выше соотношение скоростей как отношение масштабных коэффициентов

$$\frac{\upsilon}{c} = \frac{m}{n}. \qquad (28)$$

Подставляя выражения входящих величин: $u = 10^{-9}q$, $q = 10^9 h/t$, $m = h/d$, $n = t/t_0$, получаем использованное выше выражение скорости звука на молекулярном уровне (в квазикристаллической структуре воды)

$$c = \frac{\delta}{\tau_0}.$$

Для нахождения связи скорости распространения возмущений в пласте с параметром переноса a - скоростью перераспределения пластового давления или пьезопроводностью введем ряд гипотез.

Во-первых, примем (22в)

$$u = 10^{-9}q \qquad (33)$$

в качестве гидродинамической скорости движения частиц воды при распространении звука с предельным минимальным ее значением, равным дрейфовой скорости $u_{min} = u = gt_o = 1{,}2\cdot10^{-10}$ м/с, что отвечает значению модуля подземного стока $q_{min} = 0{,}12$ л/с·км^2.

Во-вторых, соотношение скоростей (28)

$$\frac{\upsilon}{c} = \frac{m}{n}$$

будем рассматривать в качестве относительного изменения плотности жидкости в звуковой волне

$$\frac{\upsilon}{c} = \frac{\Delta\rho}{\rho_0}. \qquad (34)$$

Поскольку изменение акустического давления в звуковой волне равно [6]

$$\Delta p = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s \Delta\rho = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s \rho_0 \frac{\upsilon}{c} = \upsilon c \rho_0, \qquad (35)$$

где $(dp/dr)_s = c^2$. Следовательно, имеем

$$\upsilon = \frac{\Delta p}{\rho_0 c} \qquad (35а)$$

и

$$c^2 = \frac{n}{m}\frac{\Delta p}{\rho_0}. \qquad (36)$$

Сопоставляя выражение (36) с выражением $c^2 = \chi a/\tau$, положим

$$\frac{a}{\tau} \equiv \frac{\Delta p}{\rho_0} \text{ и } \chi \equiv \frac{n}{m}.$$

Таким образом, скорость распространения возмущения в пласте определится выражением

$$c = \sqrt{\frac{n}{m}\frac{a}{\tau}}. \qquad (37)$$

Наконец, полагая $a = a_0$, видим, что соотношение масшабных кооэффициентов становится следующим:

$$m^2 = n \text{ или } \frac{m^2}{n} = 1, \qquad (38)$$

соответствущим размерности параметра пьезопроводности a, отвечая вместе с тем уравнению связи масштабных коэффициентов теории подобия и моделирования.

Следовательно, скорость распространения возмущения – скорость звука (37) с учетом (38) определится выражением

$$c = \sqrt{\frac{ma}{\tau}}, \qquad (39)$$

или после подстановки (23), (25)–(27), (38) выражениями

$$c=\sqrt{\frac{qa}{10^9\delta}}=\frac{10^{-9}q}{\mathrm{grad}H}\sqrt{\frac{H}{\delta}}=K\sqrt{\frac{H}{\delta}}\,. \qquad (39а)$$

Оценка относительного изменения плотности на основе отношения скоростей дает, как и следовало ожидать, весьма малую фундаментальную величину

$$\frac{\upsilon}{c}=\frac{\Delta\rho}{\rho_0}=\frac{m}{n}=8{,}37\cdot10^{-10}, \qquad (40)$$

равную отношению масштабных коэффициентов. Обратная величина отношения масштабных коэффициентов оказывается равной масштабному коэффициенту m (при условии $m^2 = n$). Огромная величина временного масштабного коэффициента $n = 1{,}427\cdot10^{18}$ - наглядное свидетельство, подтверждающее квазистационарность региональных гидрогеодинамических процессов, что и позволяет представлять распределение потенциалов (пластовых давлений) в поле тяжести больцмановым законом распределения плотностей и давлений - барометрическим законом [11].

Подстановка соотношения Невина [16] $K=\frac{k\gamma}{\mu}=\frac{k\rho g}{\mu}$ (r - плотность воды; m, - динамическая вязкость воды; K, k - коэффициенты фильтрации и проницаемости геофильтрационной среды) в (39) дает выражение скорости звука в виде

$$c=K\sqrt{\frac{H}{\delta}}=k\frac{\rho g}{\mu}\sqrt{\frac{H}{\delta}}\,,$$

которое можно преобразовать к виду

$$c=\frac{k\rho}{\mu}\sqrt{\frac{g^2H}{\delta}}=\frac{k\rho}{\mu}\sqrt{\frac{gH}{\delta/g}}=\frac{k\rho\nu}{\mu}\sqrt{gH}\,,$$

позволяющему оценить частоту $n = w/2$p, длину $l = c/n$ и приведенную длину $\lambda = l/2$p $= c/w$ волны.

В качестве примера приведены расчеты ряда гидродинамических параметров пласта (см. табл.) по хорошо изученному Сырдарьинскому артезианскому бассейну [13] на основе гидродинамической сетки и отстроенных нами репрезентативных профилей, совпадающих с регионально протяженными линиями токов. Поскольку в естественных условиях вдоль линий тока региональной протяженности (трубок тока, например, прямоугольного сечения, боковые поверхности которых непроницаемы, а верхняя и нижняя поверхности в различной степени «водопроницаемы», обеспечивая и определяя гидродинамическую взаимосвязь со смежными водоносными горизонтами, сверху и снизу) $B = K/a$ № № const, ввиду того, что K № const и a № const. Поэтому B определяется на основе уравнения (2а), вдоль лент тока, дифференцированно - методом конечных разностей

$$B=\frac{\ln H_{i+1}-\ln H_i}{\Delta x}\,,$$

где H_i, H_{i+1}- два соседних значения напора (эквипотенциалей), Dx – горизонтальное расстояние (шаг) между двумя соседними эквипотенциалями. Далее, пьезопроводность оценивается согласно (23), (23а) по выражениям (*м*^{2}/*сут*):

$$a=\left[\frac{K}{B}\right]=\left[8{,}64\cdot10^{-5}\frac{q}{B\cdot\mathrm{grad}H}\right]^{*}=$$

$$=\left[8{,}64\cdot10^{-5}\frac{q}{B^2H}\right]^{**}=\left[8{,}64\cdot10^{-5}\frac{qH}{(\mathrm{grad}H)^2}\right]^{***},$$

а скорость звука – согласно (39), (39а). Расчеты выполнены для постоянного значения модуля подземного стока $q = 1$ *л/с·км*^{2}; точные значения можно получить, используя законы изменения модуля подземного стока (4), (6), (9). Максимальные расчетные значения пьезоприводности $a = 4{,}3\cdot10^6$ *м*^{2}/*сут* и скорости звука $c = 119{,}25$ *м/с* соответствуют максимальному значению модуля подземного стока $q = 100$ *л/с·км*^{2}.

Оценка частоты волны показывает ее практически постоянное значение: n » $1{,}67\cdot10^5$ *с*$^{-1}$ во всем интервале потенциала $H = 500$ё92 *м*, тогда как длина волны изменяется – в пределах l = $8{,}8\cdot10^{-6}$ ё $1{,}4\cdot10^{-4}$ *м*, а приведенная длина волны – в пределах = $1{,}4\cdot10^{-6}$ ё $2{,}3\cdot10^{-5}$ *м* с максимумом, соответствующим максимуму a и c и минимуму B и b (е).

При этом имеем B » е, что обусловлено квазистационарностью регионального геофильтрационного процесса и связано с тем, что в условиях естественной убыли потенциала (напора) в направлении геофильтрации происходит сработка упругой емкости геофильтрационной среды, которая сбалансирована восполнением ресурсов за счет инфильтрационного питания и межпластовых перетоков, что препятствует необратимому осушению пластовых водонапорных геосистем. За пределами зоны интенсивного водообмена –

Таблица. **Расчетные параметры верхнемелового водоносного комплекса Сырдарьинского артезианского бассейна по линиям тока профиля Голодная степь – Каратау – Аральское море [13]**

$x(L)$, *км*	$y(H)$, *м*	grad$H$	$Y=\frac{y_{i+1}}{y_i}$	$B=$ $=\ln Y/\Delta x$, *м*$^{-1}$	$\beta=\frac{\text{grad}H}{H}$, *м*$^{-1}$	$a_{q=1}$*, *м* ^{2}/*сут*	$a_{q=1}$***, *м* ^{2}/*сут*	c_a***, *м/с*	λ_c***, *м*	Pe$_\tau$ $=xB$	$\tau=\frac{1}{aB^2}$, *с*
0	500	0,0044	0,78	$9{,}9{\cdot}10^{-6}$	$8{,}8{\cdot}10^{-6}$	$2{,}2{\cdot}10^{3}$	$2{,}2{\cdot}10^{3}$	0,27	$8{,}8{\cdot}10^{-6}$	-	$4{,}0{\cdot}10^{11}$
25	390	0,0020	0,87	$5{,}5{\cdot}10^{-6}$	$5{,}1{\cdot}10^{-6}$	$8{,}5{\cdot}10^{3}$	$8{,}4{\cdot}10^{3}$	0,53	$2{,}0{\cdot}10^{-5}$	0,14	$3{,}4{\cdot}10^{11}$
50	340	0,0016	0,88	$5{,}0{\cdot}10^{-6}$	$4{,}7{\cdot}10^{-6}$	$1{,}1{\cdot}10^{4}$	$1{,}1{\cdot}10^{4}$	0,60	$2{,}3{\cdot}10^{-5}$	0,25	$3{,}1{\cdot}10^{10}$
75	300	0,0016	0,87	$5{,}7{\cdot}10^{-6}$	$5{,}3{\cdot}10^{-6}$	$1{,}0{\cdot}10^{4}$	$1{,}1{\cdot}10^{4}$	0,60	$2{,}3{\cdot}10^{-5}$	0,43	$2{,}4{\cdot}10^{11}$
100	260	0,0008	0,94	$2{,}5{\cdot}10^{-6}$	$3{,}1{\cdot}10^{-6}$	$3{,}5{\cdot}10^{4}$	$3{,}5{\cdot}10^{4}$	1,08	$4{,}1{\cdot}10^{-5}$	0,25	$4{,}1{\cdot}10^{11}$
125	245	0,0008	0,94	$2{,}5{\cdot}10^{-6}$	$3{,}3{\cdot}10^{-6}$	$3{,}3{\cdot}10^{4}$	$3{,}3{\cdot}10^{4}$	1,04	$3{,}9{\cdot}10^{5}$	0,31	$4{,}2{\cdot}10^{11}$
150	230	0,0012	0,87	$5{,}6{\cdot}10^{-6}$	$5{,}2{\cdot}10^{-6}$	$1{,}4{\cdot}10^{4}$	$1{,}4{\cdot}10^{4}$	0,68	$2{,}6{\cdot}10^{-5}$	0,84	$2{,}0{\cdot}10^{11}$
175	200	0,0002	0,97	$1{,}0{\cdot}10^{-6}$	$1{,}0{\cdot}10^{-6}$	$4{,}3{\cdot}10^{5}$	$4{,}3{\cdot}10^{5}$	3,77	$1{,}4{\cdot}10^{-4}$	0,18	$2{,}0{\cdot}10^{11}$
200	195	0,0002	0,97	$1{,}0{\cdot}10^{-6}$	$1{,}0{\cdot}10^{-6}$	$4{,}3{\cdot}10^{5}$	$4{,}2{\cdot}10^{5}$	3,73	$1{,}4{\cdot}10^{-4}$	0,20	$2{,}1{\cdot}10^{11}$
225	190	0,0002	0,97	$1{,}1{\cdot}10^{-6}$	$1{,}0{\cdot}10^{-6}$	$4{,}3{\cdot}10^{5}$	$4{,}1{\cdot}10^{5}$	3,68	$1{,}4{\cdot}10^{-4}$	0,23	$1{,}7{\cdot}10^{11}$
250	185	0,0002	0,97	$1{,}1{\cdot}10^{-6}$	$1{,}1{\cdot}10^{-6}$	$3{,}9{\cdot}10^{5}$	$4{,}0{\cdot}10^{5}$	3,60	$1{,}4{\cdot}10^{-4}$	0,27	$1{,}8{\cdot}10^{11}$
275	180	0,0003	0,96	$1{,}8{\cdot}10^{-6}$	$1{,}7{\cdot}10^{-6}$	$1{,}7{\cdot}10^{5}$	$1{,}5{\cdot}10^{5}$	2,23	$8{,}2{\cdot}10^{-5}$	0,49	$1{,}8{\cdot}10^{11}$
300	172	0,0003	0,96	$1{,}7{\cdot}10^{-6}$	$1{,}7{\cdot}10^{-6}$	$1{,}7{\cdot}10^{5}$	$2{,}2{\cdot}10^{5}$	2,70	$1{,}0{\cdot}10^{-4}$	0,51	$1{,}3{\cdot}10^{11}$
325	165	0,0003	0,96	$2{,}0{\cdot}10^{-6}$	$1{,}8{\cdot}10^{-6}$	$1{,}6{\cdot}10^{5}$	$1{,}4{\cdot}10^{5}$	2,15	$8{,}2{\cdot}10^{-5}$	0,65	$1{,}5{\cdot}10^{11}$
350	157	0,0003	0,95	$1{,}8{\cdot}10^{-6}$	$1{,}9{\cdot}10^{-6}$	$1{,}5{\cdot}10^{5}$	$1{,}5{\cdot}10^{5}$	2,23	$8{,}2{\cdot}10^{-5}$	0,63	$1{,}8{\cdot}10^{10}$
375	150	0,0004	0,94	$2{,}5{\cdot}10^{-6}$	$2{,}7{\cdot}10^{-6}$	$8{,}0{\cdot}10^{4}$	$1{,}0{\cdot}10^{5}$	1,82	$6{,}9{\cdot}10^{-6}$	0,94	$1{,}4{\cdot}10^{11}$
400	141	0,0004	0,94	$2{,}6{\cdot}10^{-6}$	$2{,}8{\cdot}10^{-6}$	$7{,}7{\cdot}10^{4}$	$9{,}4{\cdot}10^{4}$	1,76	$6{,}3{\cdot}10^{-5}$	1,04	$1{,}3{\cdot}10^{10}$
425	132	0,0005	0,91	$3{,}8{\cdot}10^{-6}$	$3{,}8{\cdot}10^{-6}$	$4{,}5{\cdot}10^{4}$	$5{,}0{\cdot}10^{4}$	1,29	$4{,}8{\cdot}10^{-5}$	1,61	$1{,}3{\cdot}10^{11}$
450	120	0,0002	0,96	$1{,}7{\cdot}10^{-6}$	$1{,}7{\cdot}10^{-6}$	$2{,}5{\cdot}10^{5}$	$2{,}6{\cdot}10^{5}$	2,93	$1{,}1{\cdot}10^{-4}$	0,76	$1{,}1{\cdot}10^{11}$
475	115	0,0002	0,96	$1{,}8{\cdot}10^{-6}$	$1{,}7{\cdot}10^{-6}$	$2{,}5{\cdot}10^{5}$	$2{,}5{\cdot}10^{5}$	2,87	$1{,}1{\cdot}10^{-4}$	0,86	$1{,}1{\cdot}10^{11}$
500	110	0,0002	0,95	$1{,}9{\cdot}10^{-6}$	$1{,}8{\cdot}10^{-6}$	$2{,}4{\cdot}10^{5}$	$2{,}4{\cdot}10^{5}$	2,82	$1{,}1{\cdot}10^{-4}$	0,95	$1{,}0{\cdot}10^{10}$
525	105	0,0005	0,93	$2{,}8{\cdot}10^{-6}$	$4{,}8{\cdot}10^{-6}$	$3{,}6{\cdot}10^{4}$	$1{,}3{\cdot}10^{5}$	2,07	$7{,}5{\cdot}10^{-5}$	1,47	$8{,}5{\cdot}10^{10}$
550	98	0,0002	0,94	$2{,}5{\cdot}10^{-6}$	$2{,}0{\cdot}10^{-6}$	$2{,}2{\cdot}10^{5}$	$1{,}5{\cdot}10^{5}$	2,23	$8{,}2{\cdot}10^{-5}$	1,37	$9{,}2{\cdot}10^{10}$
575	92	-	-	-		-	-	-	-	-	-

в зонах затрудненного водообмена и «застойного» режима сработка упругой емкости геофильтрационной среды ведет к ее уплотнению, что связано с ростом эффективного давления ответственного за эффективную пористость среды.

Оценка релаксационного числа Пекле в форме Pe$_t$ = $x/\sqrt{a\tau}$ = xB = 0,14ё1,61 имеет порядок единицы, что указывает на возможность применения при изучении естественных гидрогеодинамических процессов в геофильтрационных средах с пространственной неоднородностью параметров пород и пласта неоднородного волнового дифференциального уравнения (17).

Вместе с тем релаксационное число Пекле в форме Pet$_t$Ұ= xc/a имеет порядок (1,3ё7,1)$\cdot10^5$ >> 1, что, казалось бы, указывает и на возможность применения классического уравнения Буссинеска (10), (10а), (10б). Однако, сравнение Pe$_t$ = $x/\sqrt{a\tau}$ и Pe$_t$Ұ= xc/a дает выражение времени релаксаци $\tau'=a/c^2$ ~1*с*, тогда как в действительности t = 1/aB^2 = 10^9 ё10^{11} *с* (см. табл.).

Это несоответствие устраняется: 1) либо если при сравнении критериев Пекле использовать выражение скорости звука $c=\sqrt{ma/\tau}$, что приводит к увеличению времени релаксации tҰ, в соответствии с (40), в m = 1/ 8,37$\cdot10^{-10}$ раз - до величины t; 2) либо путем умножения безразмерной скорости - числа Пекле Pe$_t$Ұ= xc/a =7,1$\cdot10^5$ на скорость звука, рассчитанную по выражению

$$c = aB$$

(на основе сравнения выражений $\tau=a/c^2$ и $\tau=1/aB^2$), что дает результаты, аналогичные скорости звука, определенные по выражению $c=\sqrt{ma/\tau}$ (отметим, при этом, расчеты по $c = aB$ дают *заниженные результаты*: 6$\cdot10^{-7}$ ё1$\cdot10^{-6}$ *м/с*). Вместе с тем расчет скорости звука по выражению

$$c'=\frac{m}{\tau B}$$

(на основе сопоставления выражений $\tau=1/aB^2$ и $\tau=a/c^2$, где c^2 = ma/τ, что дает $\tau=m/aB^2$, и последующей подстановки $c = aB$) приводят к *завышенным результатам*: cҰ = 1166 ё7708 *м/с* (при максимальной скорости звука $c = 119{,}25$ *м/с*, соответствующей модулю подземного стока $q = 100$ *л/с·км*²). Отношение же *заниженных* и *завышенных* результатов, как и следовало ожидать, дает c/cҰ = =$1/m = 8{,}37 \cdot 10^{-10}$, что указывает на достоверность оценки скорости звука по выражению $c = \sqrt{ma / \tau}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арамонович И.Г.*, *Левин В.И.* Уравнения математической физики. М.,1969. 288 с.

2. *Арье А.Г.* Физические основы фильтрации подземных вод. М., 1984. 101 с.

3. *Бутковский А. Г.*, *Пустыльников Л. М.* Теория подвижного уравления системами с распределен-ными параметрами. М., 1980. 384с.

4. *Бэр Я.*, *Заславски Д.*, *Ирмей С.* Физико-математические основы фильтрации воды М.,1971.452 с.

5. *Гавич И.К.* Гидрогеодинамика. М.,1988. 350с.

6. *Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М.* Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М., 1965. 384 с.

7. *Лейбензон Л.С.* Подземная гидрогазодинамика // Собрание трудов. М., 1953. Т. 2. 544 с.

8. *Лыков А.В.* Тепломассообмен. Справочник. М., 1972. 560 с.

9. *Мятиев А.Н.* Напорный комплекс подземных вод и колодцы // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. М., 1947. №9. С.1069-1088.

10. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М., 1977. 664 с.

11. *Порядин В.И.* К представлению пластовых давлений и подземного стока артезианских геоструктур больцмановым распределеникм и газом // Изв. НАН РК. Серия геол. 2004. № 2. С.75-89.

12. *Порядин В.И.* К методике оценки и прогноза интенсивности водообмена, загрязненности и экологического качества подземных вод для целей ГМПВ. Изв. НАН РК. Серия геол. 2005. № 3. С. 78-86.

13. *Сырдарьинский* артезианский бассейн: (математическое моделирование ресурсов подземных вод в условиях техногенеза). Алма-Ата, 1992. 200с.

14. *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкости Л., 1975. 592 с.

15. *Шестаков В.М.* Динамика подземных вод. М,. 1979. 368 с.

16. *Щелкачев В.Н.* Упругий режим пластовых водонапорных систем. М., 1948. 145 с.