А. Н. ТЮРЕХОДЖАЕВ, А. Г. ИБРАЕВ

ДВИЖЕНИЕ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО СОСТАВА ПО ДОСТАТОЧНО ДЛИННОМУ РЕЛЬСУ, ЛЕЖАЩЕМУ НА ДИСКРЕТНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Бегущие сосредоточенные нагрузки, моделирующие движение колес железнодорожного состава сухим трением на контакте «колесо-рельс», рассматриваются как локализованные продольные силы, направленные по рельсу. Взаимодействие колес шестиосного вагона подвижного состава с рельсами определяется следующей динамической нагрузкой [1]:

$$P(x,t)=\frac{\tau_k}{EF}\sum_{k=0}^{n}\Big\{\delta\left[v_0t-x-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+\delta\left[v_0t-x-l_1-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+$$

$$+\delta\left[v_0t-x-2l_1-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+\delta\left[v_0t-x-2l_1-l_2-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+$$

$$+\delta\left[v_0t-x-3l_1-l_2-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+\delta\left[v_0t-x-4l_1-l_2-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]\Big\}, \tag{1}$$

где τ_k – величина, связанная с контактным сухим трением качения; l_1, l_2, l_3 – расстояние между колесами; E – модуль упругости; F – площадь поперечного сечения рельса; n – количество вагонов; $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

Волновое уравнение продольного колебания при взаимодействии колес железнодорожного состава с шестиосными вагонами и рельсом, лежащим на шпалах, запишется в виде [2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha\sum_{i=1}^{m}u(t,x_i)\delta\left(t-\frac{x_i}{a}\right)=\frac{\tau_k}{EF}\sum_{k=0}^{n}\{\delta[v_0t-x-k(4l_1+l_2+l_3)]+$$

$$+\delta\left[v_0t-x-l_1-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+\delta\left[v_0t-x-2l_1-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+\delta\left[v_0t-x-2l_1-l_2-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+$$

$$+\delta\left[v_0t-x-3l_1-l_2-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+\delta\left[v_0t-x-4l_1-l_2-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]\Big\}, \tag{2}$$

где $u(x,t)$ – смещение сечения рельса x в момент времени t; α – коэффициент жесткости, принимаемый одинаковым для всех шпал; x_i – координата i-й шпалы; m – общее количество шпал; a – скорость упругой волны; v_0 – скорость движения состава.

В начальный момент времени будем считать систему ненапряженной и недеформированной:

$$t=0;\;\; u(0,x)=0;\;\; \frac{\partial u(0,x)}{\partial x}=0. \tag{3}$$

Граничное условие представляется в виде

$$x=0,\;\; \sigma(t,0)=E\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=-\sigma_0\delta(t)-\sigma_0\sum_{k=1}^{n}\left\{\delta\left[t-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+\right.$$

$$+\delta\left[t-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+\delta\left[t-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+\delta\left[t-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+$$

$$\left.+\delta\left[t-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+\delta\left[t-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]\right\}. \tag{4}$$

Использование интегрального преобразования Лапласа–Карсона, позволяет задачу (2)–(4) записать в изображениях

$$\frac{d^2\bar{u}(p,x)}{dx^2}-\frac{p^2}{a^2}\bar{u}(p,x) = -\frac{\alpha\cdot p}{a}\sum_{i=1}^{m}\bar{u}(p,x_i)e^{-p\frac{x_i}{a}}-\frac{\tau_k}{EF}\sum_{k=0}^{n}\frac{p}{v_0}\left[e^{-p\frac{x+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{x+2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right]; \quad (5)$$

$$t=0;\ \ \bar{u}(0,p)=0;\ \ \frac{d\bar{u}(p,x)}{dx}=0; \quad (6)$$

$$x=0;\ \ \frac{\partial\bar{u}(p,0)}{\partial x}=-\frac{\sigma_0}{E}\cdot p-\frac{\sigma_0}{E}\times \quad (7)$$

$$\times p\sum_{k=1}^{n}\left[e^{-p\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right],$$

где черточка над функцией означает изображение функции $u(x,t)$.

Метод неопределенных коэффициентов Лагранжа позволяет получить общее решение уравнения (5)

$$\bar{u}(p,x)=c_1e^{-\frac{x}{a}p}+c_2e^{\frac{x}{a}p}-\frac{\tau_k a^2 v_0}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p}\left[e^{-p\frac{x+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{x+2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right]+\alpha\cdot a\sum_{i=1}^{m}\bar{u}(p,x_i)\frac{1}{p}e^{-\frac{p}{a}x_i}. \quad (8)$$

Использование граничных условий задачи дает:

$$\bar{u}(p,x)=\alpha\cdot a\sum_{i=1}^{m}\bar{u}(p,x_i)\frac{1}{p}e^{-\frac{p}{a}x_i}+\frac{\tau_k a^3}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p}\left(e^{-\frac{x}{a}p}-\frac{v_0}{a}e^{-\frac{x}{v_0}p}\right)\left[e^{-p\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right]+$$

$$+\frac{\sigma_0 a}{E}\left\{e^{-\frac{x}{a}p}+\sum_{k=1}^{n}\left[e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}\right]\right\}. \quad (9)$$

Введем обозначение

$$f(p,x)=\frac{\tau_k a^3}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p}\left(e^{-\frac{x}{a}p}-\frac{v_0}{a}e^{-\frac{x}{v_0}p}\right)\left[e^{-p\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right]+$$

$$+\frac{\sigma_0 a}{E}\left\{e^{-\frac{x}{a}p}+\sum_{k=1}^{n}\left[e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}\right]\right\}. \tag{10}$$

Оригинал $\Phi(t,x)$ функции $f(p,x)$ будет иметь вид:

$$\Phi(t,x)=\frac{\tau_k a^3}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(t-\frac{x}{a}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+\right.$$

$$+\left(t-\frac{x}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$\left.+\left(t-\frac{x}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)\right\}-$$

$$+\frac{\tau_k a^2 v_0}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+\right.$$

$$+\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{3l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{3l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{4l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{4l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)\Bigg]\Bigg\}+$$

$$+\frac{\sigma_0\cdot a}{E}\left\{H\left(t-\frac{x}{a}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left[H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)+H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{l_1+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)+\right.\right.$$

$$+\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2l_1+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)+H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)+$$

$$\left.\left.+H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{3l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)+H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{4l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)\right]\right\}. \qquad (11)$$

Решение в изображениях (9) представим в компактном виде:

$$\bar{u}(p,x)=f(p,x)+\alpha\cdot a\sum_{i=1}^{m}\bar{u}(p,x_i)\frac{1}{p}e^{-\frac{p}{a}x_i}. \qquad (12)$$

Определим функцию $\bar{u}(p,x_i)$, $i=\overline{1,m}$, связанную с упругим откликом первой (i = 1) шпал

$$\bar{u}(p,x_1)=\frac{1}{1-\dfrac{\alpha\cdot a}{p}\cdot e^{-\frac{x_1}{a}p}}f(p,x_1).$$

Разлагая это выражение по бегущим волнам, имеем

$$\bar{u}(p,x_1)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha\cdot a}{p}\right)^{j}e^{-\frac{jx_1}{a}p}\cdot f(p,x_1). \qquad (13)$$

Этот ряд, как известно, из [3] является сходящимся.

Для нахождения оригинала при любом i введем обозначения в виде:

$$f_i(t,x_i)=\frac{\tau_k}{EF}\cdot\frac{a^3}{a^2-v_0^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^j}{p^{j+1}}\left(e^{-\frac{(j+1)x_i}{a}}-\frac{v_0}{a}e^{-\frac{(j+1)x_i}{v_0}}\right)\times\left[e^{-p\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right]+\frac{\sigma_0 a}{E}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^j}{p^{j+1}}e^{-\frac{(j+1)x}{a}p}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^j}{p^{j+1}}\times\right.$$

$$\times\left[e^{-p\left(\frac{(j+1)x_i}{a}+\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{(j+1)x_i}{a}+\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{(j+1)x_i}{a}+\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+\right.$$

$$\left.\left.+e^{-p\left(\frac{(j+1)x_i}{a}+\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{(j+1)x_i}{a}+\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{(j+1)x_i}{a}+\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}\right]\right\}. \qquad (14)$$

Оригинал (14) имеет выражение

$$F\left(t,x_i\right)=\frac{\tau_k}{EF}\cdot\frac{a^3}{a^2-v_0^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha a\right)^j}{p^{j+1}}\left\{\left[t-\frac{\left(j+1\right)x_i}{a}-\frac{k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{\left(j+1\right)x_i}{a}-\frac{k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]+\right.$$

$$+\left[t-\frac{\left(j+1\right)x_i}{a}-\frac{l_1+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{\left(j+1\right)x_i}{a}-\frac{l_1+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]+\left[t-\frac{\left(j+1\right)x_i}{a}-\frac{2l_1+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]^{j+1}\times$$

$$\times H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}\times$$

$$\times H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}\times$$

$$\times H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}\times$$

$$\times H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}\times$$

$$\left.\times H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]\right\}-\frac{\tau_k}{EF}\cdot\frac{a^2v_0}{a^2-v_0^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^j}{(j+1)!}\times$$

$$\times\left\{\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+\right.$$

$$+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+$$

$$+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+$$

$$+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{2l_1+l_2k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+$$

$$+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+$$

$$\left.+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]\right\}+$$

$$+\frac{\sigma_0 a}{E}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^j}{(j+1)!}\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}\right)^{j+1}H\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}\right)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^j}{p^{j+1}}\times\right.$$

$$\times\left[\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)^{j+1}H\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+\right.$$

$$+\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)^{j+1}H\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)^{j+1}H\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+l_2k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)^{j+1}H\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)^{j+1}H\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)^{j+1}H\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)\Bigg]\Bigg\}. \tag{15}$$

Запишем решение в оригиналах для нескольких выражений $u(t,x_1)$, $u(t,x_2)$, $u(t,x_3)$:

$$u(t,x_1)=F(t,x_1), \tag{16}$$

$$u(t,x_2)=F(t,x_2)+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^{j+1}}{(j+1)!}F(t,x_1,(j+1)x_2), \tag{17}$$

$$u(t,x_3)=F(t,x_3)+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^{j+1}}{(j+1)!}\left[F(t,x_1,x_1+jx_3)+F(t,x_2,x_2+jx_3)\right]+$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{(\alpha a)^{j+1}}{(j+1)!}\right]^2F(t,x_1,x_1+x_2+j(x_2+x_3)). \tag{18}$$

Методом математической индукции [3] удается записать $u(t,x_i)$ для общего случая

$$u(t,x_i)=F(t,x_k)+\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^{j+1}}{(j+1)!}F(t,x_1,x_2+jx_i)+\sum_{i=2}^{k-2}\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{(\alpha a)^{j+1}}{(j+1)!}\right]F\left(t,x_{g-1},(j+1)x_{ig}^{i-2}\right)+$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{(\alpha a)^{j+1}}{(j+1)!}\right]^{k-1}F\left(t,x_1,\sum_{g=1}^{i-1}(j+1)x_i\right), \tag{19}$$

где x_i^{k-2} – сумма сочетаний i элементов из множества элементов x_1, x_2, …, x_{k-2}.

Таким образом, решение поставленной задачи в окончательном виде имеет выражение:

$$u(t,x)=\Phi(t,x)+\sum_{i=1}^{m}u(t,x_i), \tag{20}$$

где $\Phi(t,x)$ и $u(t,x_i)$ определяются формулами (11), (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тюреходжаев А.Н., Ибраев А.Г.* К динамике движения железнодорожного состава: Мат-лы 10-й Межвузовской конференции по математике и механике. Т. 2. Алматы, 2005. С. 260-265.

2. *Nikitin L.V., Tyurehodgaev A.N.* Defor d'un pipeline souterrain sous l'action de l'onde sismique. Deformation of the Underground Pipeline under Action of Seismic Wave. XII[th] European Conference of Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. 7-10 June 1999. Amsterdam, the Netherlands.

3. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.

Резюме

Тұрақты жылдамдықпен қозғалып келе жатқан алты осьті вагондардан тұратын теміржол құрамасының шпалда жатқан жеткілікті дәрежедегі ұзын рельстің әсерінен туындаған бойлық тербелісін толқынды теория жүзінде қарастырып, аналитикалық шешімі алынған.

Summary

From the position of the wave theory we consider longitudinal vibration of sufficiently long rail which lies on ties under force of wheels which move at a v_0 speed. Analytical description of the process is found by using of Laplace–Carson integral conversion.

Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, г. Алматы

Поступила 3.03.06г.

Г. Н. ИБРАГИМОВА, О. С. БАЛАБЕКОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА МИКРОФИЛЬТРАЦИИ НА ГОФРИРОВАННОМ ФИЛЬТРУЮЩЕМ ЭЛЕМЕНТЕ

Среди методов мембранного разделения важное значение имеет микрофильтрация, которая применяется для выделения относительно крупных коллоидных частиц или взвешенных микрочастиц размером от 0,1 до 10,0 мкм. При этом движущей силой этого процесса является трансмембранный перепад давления. Его проводят при невысоких рабочих давлениях (порядка десятых и сотых долей МПа). Микрофильтрация занимает промежуточное положение между ультрафильтрацией и обычной фильтрацией без резко выраженных границ [1].

В настоящее время существуют различные типы аппаратурного оформления процесса микрофильтрации. В частности, наблюдается рост научного, технологического и коммерческого интереса к процессу микрофильтрации в модуле на основе гофрированных фильтрующих элементов [2]. Однако отсутствие научно обоснованных методов расчета препятствует их реализации на практике.

Среди существующих методов расчета преобладают основанные на эмпирических корреляциях, не отражающих физическую сущность процесса. В большинстве существующих методов напорный и дренажный каналы рассматриваются изолированно, что не позволяет учесть взаимосвязь энергетического состояния потоков на напорном и дренажном каналах. При расчете микрофильтрации часто не учитывается дисперсионный состав разделяемой суспензии.

Целью настоящей работы является разработка математической модели и метода расчета нестационарного процесса микрофильтрации суспензии в модуле на основе гофрированных фильтрующих элементов.

Моделирование процесса микрофильтрации основано на следующих допущениях и физических предпосылках:

1. Мембрана представляет собой несжимаемое твердое тело со сквозными порами цилиндрической формы. Поры расположены перпендикулярно к поверхности мембраны и имеют одинаковые размеры – радиус $r_М$ и длину $D_М$.

2. Разделяемая смесь представляет собой полидисперсную суспензию, характеризуемую параметрами $r_{мин}$, $r_{макс}$. Изменение концентрации диспергированных частиц вдоль мембранного канала пренебрежимо мало.

3. Механизм разделения – ситовой. Мембрана удерживает частицы, радиус которых больше радиуса пор и может быть рассчитан как среднегеометрическая величина $r_S = \sqrt{r_м r_{макс}}$.

4. В процессе микрофильтрации на мембране непрерывно нарастает слой осадка, поток пермеата сквозь который описывается уравнением Козени–Кармана. Осадок неподвижен, так как сдвиговые напряжения в осадке при течении жидкости вдоль мембранного канала недостаточны для его перемещения.

5. Частицы, вошедшие в поры, имеют определенную вероятность оседания на их внутренней поверхности. Осевшие частицы равномерно распределяются по всей поверхности поры.