1. Установлен химизм взаимодействия исходных фаз в системе Cr – O–C и показаны стадии процесса восстановления оксида хрома конденсированным углеродом, состоящие из твердофазного и жидкофазного взаимодействия.

2. Роль восстановителя при твердофазном и жидкофазном взаимодействии играет конденсированный углерод и углерод карбидов хрома и процесс протекает только в атмосфере CO при O/C = 1,33, чем и определяется общий расход углерода. Участия в восстановлении оксидов хрома газ CO не принимает.

3. Твердофазные и жидкофазные реакции восстановления в основном лимитируются диффузионными процессами, интенсификация которых возможна только при их отделении друг от друга. Поэтому первые твердофазные стадии химизма взаимодействия, протекающие с образованием карбида хрома, можно рассматривать как предварительную стадию подготовки сырья к металлургическому переделу, а жидкофазную – как основную стадию процесса получения металла.

Таким образом, использование ПТА в системах Me–O–C позволяет установить химизм взаимодействия исходных фаз и выбрать оптимальные пути организации металлургического процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Синярев Г.Б., Ватолин Н.А., Трусов Б.Г., Моисеев Г.К.* Применение ЭВМ для термодинамических расчетов металлургических процессов. М.: Наука, 1982. 203 с.

2. *Ваталин Н.А., Моисеев Г.К., Трусов Б.Г.* Термодинамическое моделирование в высокотемпературных неорганических системах. М.: Металлургия, 1994. 352с.

3. *Моисеев Г.К., Ватолин Н.А., Маршук Л.А., Ильиных Н.И.* Температурные зависимости, приведенные энергии Гиббса некоторых неорганических веществ. Екатеринбург: УрО РАН, 1997. 230 с.

4. *Моисеев Г.К., Вяткин Г.П.* Термодинамическое моделирование в неорганических системах. Екатеринбург: УрО РАН, 2002. 256 с.

5. *Симбинов Р.Д., Малышев В.П.* Термодинамическое, стехеометрическое и эксергетическое моделирование фазовых равновесий. Алматы: Fылым, 1990. 100 с.

6. *Симбинов Р.Д., Нурманова Ш.Г.* Термодинамическое моделирование высокотемпературных процессов в системе Cr-O–C // Вестник МОН РК, НАН РК. 2003. № 2. С. 37-40.

Поступила 3.02.06г.

Т. Д. КАРИМБАЕВ, М. Ж. ЖУМАБАЕВ, Б. М. МЫКТЫБЕКОВ

О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЗАДАЧАХ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРОВ

В связи с широким применением и большими возможностями компьютерной техники появляется возможность решения прикладных задач численными методами и методами, в которых рационально сочетаются численные и аналитические методы, то есть возникает необходимость разработки численно-аналитических методов решения задач механики деформируемого твердого тела, в том числе методов решения задач напряженно-деформированного состояния ортотропных цилиндров [1–4]. Следовательно, представляют интерес различные формы разрешающих уравнений, полученные относительно отдельных компонентов вектора перемещений и напряжений. Такие соотношения могут быть записаны в виде дифференциальных или интегральных уравнений, удобных для исследования как отдельных, так и общих особенностей поведения ортотропных цилиндров. Ниже приведены некоторые дифференциальные и интегральные уравнения, полученные относительно отдельных компонентов вектора перемещений.

Задача об осесимметричной деформации полого ($r_a \le r \le r_b$) цилиндра конечной длины $0 \le z \le L$ из ортотропного материала формулируется следующим образом. Необходимо найти решение уравнений равновесия

$$r\,(\sigma_r)_{,r} + \sigma_r - \sigma_\varphi + r\,(\sigma_{rz})' = 0,$$
$$r\,(\sigma_{rz})_{,r} + \sigma_{rz} + r\,(\sigma_z)' = 0 \qquad (1)$$

ортотропного цилиндра [5], для которого компоненты тензора деформаций определяются из следующих физических и кинематических соотношений:

$$\varepsilon_r = (u)_{,r} = (\sigma_r - \nu_{r\varphi}\,\sigma_\varphi - \nu_{rz}\,\sigma_z) / E_r\,,$$
$$\varepsilon\varphi_\varphi = u/r = (-\nu_{\varphi r}\,\sigma_r + \sigma\varphi_\varphi - \nu_{\varphi z}\,\sigma_z) / E_\varphi\,,$$
$$\varepsilon_z = (w)' = (-\,\nu_{zr}\,\sigma_r - \nu_{z\varphi}\,\sigma_\varphi + \sigma_z) / E_z\,,$$
$$\varepsilon_{rz} = (u)' + (w)_{,r} = \sigma_{rz} / G_{rz}. \qquad (2)$$

Здесь σ_r, σ_φ, σ_z и σ_{rz} – радиальная, окружная, осевая и касательная компоненты тензора напряжений, ε_r, ε_φ, ε_z и ε_{rz} – соответствующие компоненты тензора деформаций, u, w – компоненты (радиальная и осевая) вектора перемещений. Кроме того, производные по радиальной координате r обозначены $(...),_r$, а по осевой z – $(...)'$. Для ортотропного тела имеют место связи

$$\nu_{r\varphi} / E_r = \nu_{\varphi r} / E_\varphi , \quad \nu_{rz} / E_r = \nu_{zr} E_z,$$
$$\nu_{\varphi z} / E_\varphi = \nu_{z\varphi} / E_z. \tag{3}$$

Если в общем случае деформирования ортотропное тело имеет девять независимых упругих констант [5], то при осесимметричной деформации из них участвуют только семь постоянных – модули упругости в радиальном E_r, кольцевом E_φ и осевом направлениях E_z, коэффициенты Пуассона $\nu_{r\varphi}$, ν_{rz} и $\nu_{\varphi z}$, характеризующие сжатие в направлении второго индекса при растяжении в направлении первого индекса, и модуль сдвига G_{rz}.

Ниже используются разрешенные относительно напряжений физические соотношения

$$\sigma_r = E_1 [(u),_r + \nu_{12} u/r + \nu_{13} (w)'],$$
$$\sigma_\varphi = E_2 [\nu_{21} (u),_r + u/r + \nu_{23}(w)'],$$
$$\sigma_z = E_3 [\nu_{31} (u),_r + \nu_{32} u/r + (w)'],$$
$$\sigma_{rz} = G_{rz} [(u)' + (w),_r], \tag{4}$$

в которых

$$E_1=E_r(1-\nu_{\varphi z}\nu_{z\varphi})/\Delta, \quad \nu_{12}=(\nu_{r\varphi}+\nu_{rz}\nu_{z\varphi})/(1-\nu_{\varphi z}\nu_{z\varphi}),$$
$$\nu_{13}=(\nu_{rz}+\nu_{r\varphi}\nu_{\varphi z})/(1-\nu_{\varphi z}\nu_{z\varphi}),$$
$$E_2=E_\varphi(1-\nu_{zr}\nu_{rz})/\Delta, \quad \nu_{21}=(\nu_{\varphi r}+\nu_{\varphi z}\nu_{zr})/(1-\nu_{zr}\nu_{rz}),$$
$$\nu_{23}=(\nu_{\varphi z}+\nu_{\varphi r}\nu_{rz})/(1-\nu_{zr}\nu_{rz}),$$
$$E_3=E_z(1-\nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r})/\Delta, \quad \nu_{31}= (\nu_{zr}+\nu_{z\varphi}\nu_{\varphi r})/(1-\nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}),$$
$$\nu_{32}=(\nu_{z\varphi}+\nu_{zr}\nu_{r\varphi})/(1-\nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}),$$
$$\Delta=1-\nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}-\nu_{\varphi z}\nu_{z\varphi}-\nu_{zr}\nu_{rz}-\nu_{r\varphi}\nu_{\varphi z}\nu_{zr}-\nu_{rz}\nu_{z\varphi}\nu_{\varphi r}. \tag{5}$$

Композиционный материал с произвольной системой армирования является ортотропным телом. Композиционный материал с продольно уложенными волокнами описывается моделью трансверсально-изотропного тела. В этом случае

$$E_r = E_\varphi, \nu_{r\varphi} = \nu_{\varphi r}, \nu_{rz} = \nu_{\varphi z}, \nu_{zr} = \nu_{z\varphi}$$

и

$$E_1 = E_2, \nu_{12} = \nu_{21}, \nu_{13} = \nu_{23}, \nu_{31} = \nu_{32} \tag{6}$$

и имеется пять независимых постоянных (E_r, E_z, $\nu_{r\varphi}$, ν_{rz}, G_{rz}).

Композиционный материал, армированный в кольцевом направлении, также является трансверсально-изотропным материалом. В этом случае

$$E_r = E_z , \nu_{rz} = \nu_{zr}, \nu_{\varphi r} = \nu_{\varphi z}, \nu_{r\varphi} = \nu_{z\varphi}$$

и

$$E_1 = E_3, \nu_{13} = \nu_{31}, \nu_{12} = \nu_{32}, \nu_{21} = \nu_{23}. \tag{7}$$

Для изотропного материала все модули и коэффициенты Пуассона равны между собой, а модуль сдвига $G = E/2(1+\nu)$. Для изотропного тела количество независимых упругих характеристик равняется двум – это модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν.

Из системы уравнений равновесия получается система дифференциальных уравнений

$$L(u) + aw',_r + bw' / r = 0,$$
$$M(u) + h(w,_{rr} + w,_r/r) + w'' = 0 \tag{8}$$
$$(\text{или } M(u) + Q(w) = 0),$$

в которых используются обозначения

$$L(u) = u,_{rr} + u,_r/r - \lambda^2 u/r^2 + gu'' = r^{\lambda-1} [(r^{1-2\lambda} (r^\lambda u),_r],_r + gu'',$$
$$M(u) = cu',_r + du'/r = cr^{-d/c}(r^{d/c}u'),_r, \tag{9}$$
$$Q(w) = h(w,_{rr} + w,_r/r) + w'' = hr^{-1}(rw,_r),_r + w''$$

и

$$\lambda^2 = E_2/E_1, g = G_{rz}/E_1, a = \nu_{13} + g, b = \nu_{13} - \lambda^2\nu_{23},$$
$$h = G_{rz}/E_3, c = \nu_{31} + h, d = \nu_{32}+h. \tag{10}$$

Характерно, что для цилиндров, материал которых моделируется трансверсально-изотропной средой, соотношения (10) упрощаются. Для композиционных материалов с волокнами, уложенными в продольном (ось z) направлении

$$\lambda^2 = 1, g = G_{rz}/E_1, a = \nu_{13} + g, b = 0,$$
$$h = G_{rz}/E_3, \nu_{31} = \nu_{32} \quad \text{и} \quad c = d = \nu_{31}+ G_{rz}/E_3, \tag{11}$$

и для композиционных материалов с поперечно уложенными волокнами (кольцевая намотка)

$$\lambda^2 = E_2/E_1, g = G_{rz}/E_1, a = \nu_{13} + g, b = \nu_{13} - \lambda^2\nu_{23},$$
$$h = G_{rz}/E_3, \nu_{31} = \nu_{32} \quad \text{и} \quad c = d. \tag{12}$$

Наконец, для цилиндров из изотропных материалов –

$$E = E_1 = E_2 = E_3, \nu = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu_{31} = \nu_{32},$$
$$\lambda^2 = 1, g = h = G_{rz}/E = 1/2(1+\nu),$$
$$a = c = d = \nu + g, b = 0. \tag{13}$$

Равенство параметров c = d для трансверсально-изотропных тел и условие, что параметр b = 0 для изотропных тел заметно упрощает способ получения разрешающих уравнений.

Иногда (при соответствующих граничных условиях) более удобными для исследований оказываются уравнения осесимметричной деформации ортотропных цилиндров, полученные относительно осевой w компоненты вектора перемещений.

Для получения разрешающих уравнений относительно осевой w компоненты вектора перемещения используется система уравнений, записанная в форме

$$u,_{rr} + u,_r/r - \lambda^2 u/r^2 + gu'' + R(w) = 0,$$
$$cu',_r + du' / r + Q(w) = 0, \qquad (14)$$

в которой введены обозначения

$$R(w) = aw',_r + bw'/r = ar^{-b/a}(r^{b/a}w'),_r, \qquad (15)$$
$$Q(w) = h(w,_{rr} + w,_r/r) + w'' = hr^{-1}(rw,_r),_r + w''.$$

Для ортотропной среды радиальная компонента u вектора перемещения находится в результате интегрирования второго уравнения системы (14)

$$cu',_r + du' / r = cr^{-d/c}(r^{d/c}u'),_r = -Q(w), \qquad (16)$$

если предварительно определена осевая w компонента перемещения. Последняя является решением уравнения

$$L_uR(w) - M_uQ(w) = 0, \qquad (17)$$

в котором операторы $L_u(\ldots)$ и $M_u(\ldots)$ даются соотношениями

$$L_u(\ldots)=c\partial^3(\ldots)/\partial r^2\partial z+(p_1/r)\partial^2(\ldots)/\partial r\partial z+(p_2/r^2)\partial(\ldots)/\partial z,$$
$$M_u(\ldots)=\partial^3(\ldots)/\partial r^3+(q_1/r)\partial^2(\ldots)/\partial r^2+$$
$$+(q_2/r^2)\partial(\ldots)/\partial r+q_3(\ldots)/r^3+g\partial^3(\ldots)/\partial r\partial z^2+$$
$$+(q_4/r)\partial^2(\ldots)/\partial z^2. \qquad (18)$$

Постоянные коэффициенты $p_i(i=1,2)$, $q_j(j=1,2,3,4)$, входящие в выписанные операторы L_u и M_u, должны быть определены из условия, позволяющего исключить из системы уравнений (8) радиальную u компоненту перемещения, т.е. из условия

$$L_u(u,_{rr}+u,_r/r-\lambda^2u/r^2+gu'')-M_u[cu',_r+du'/r] = 0. \qquad (19)$$

Равенства (18) и (19) позволяют получить следующую систему алгебраических уравнений относительно 6 неизвестных параметров p_i, q_j:

$$c + p_1 - d - cq_1 = 0,$$
$$-2c - c\lambda^2 + p_1 + p_2 + 3d - dq_1 - cq_2 = 0,$$
$$2c + 4c\lambda^2 - p_1 - \lambda^2p_1 + p_2 - 6d + 2dq_1 - dq_2 - cq_3 = 0,$$
$$-6c\lambda^2 + 2\lambda^2p_1 - \lambda^2p_2 + 6d - 2dq_1 + dq_2 - dq_3 = 0,$$
$$gp_1 - dg - cq_4 = 0, \quad gp_2 + dg - dq_4 = 0. \qquad (20)$$

Решение системы алгебраических уравнений (20) позволяет получить

$$p_1 = c(3 + 2d/c), \quad p_2 = d(2 + d/c),$$
$$q_1 = 4 + d/c, \quad q_2 = 1 + 3d/c - \lambda^2,$$
$$q_3 = (\lambda^2 - 1)(1- d/c), \quad q_4 = g(3 + d/c). \qquad (21)$$

Так как форма преобразования (18) установлена, то уравнение (17) может быть записано в окончательной форме – форме дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка

$$\{h\partial^5/\partial r^5+(a_0/r)\partial^4/\partial r^4+(a_1/r^2)\partial^3/\partial r^3+(a_2/r^3)\partial^2/\partial r^2+(a_3/r^4)\partial/\partial r+$$
$$+[b_0\partial^3/\partial r^3+(b_1/r)\partial^2/\partial r^2+(b_2/r^2)\partial/\partial r+b_3/r^3)]\partial^2/\partial z^2+$$
$$+(g\partial/\partial r+q_4/r)\partial^4/\partial z^4\}w=0 \qquad (22)$$

относительно осевой w компоненты вектора перемещений.

Здесь введены дополнительные обозначения

$$a_0= h(1+q_1) = h(5+d/c),$$
$$a_1= h(-3+q_1+q_2) = h(2-\lambda^2+4d/c),$$
$$a_2 = h(6-2q_1+q_2+q_3) = -h[2(1-d/c)+\lambda\lambda^2d/c),$$
$$a_3= h(-6+2q_1-q_2+q_3) = h\lambda\lambda^2(2-d/c),$$
$$b_0 = (1+gh-ac),$$
$$b_1 = q_1+gh(1+q_4/h)-bc-ap_1=$$
$$=(1+gh)(4+d/c)-bc-ac(3+2d/c), \qquad (23)$$
$$b_2 = q_2+gh(q_4/h-1)+2bc-bp_1-ap_2 =$$
$$= 1+3d/c-\lambda^2+(gh-ad)(2+d/c)-bc(1+2d/c),$$
$$b_3 = dq_3-2bc+b(p_1-p_2) = (1-d/c)[\lambda^2-1+bc(1+d/c)].$$

Предпринимались попытки представления уравнения (22) в виде произведения дифференциальных операторов более низкого порядка, например, в виде произведения трех операторов

$$M_1M_2M_3(w) = 0, \qquad (24)$$

где

$$M_1(\ldots) = x_0\partial(\ldots)/\partial r + x_1(\ldots)/r,$$
$$M_2(\ldots) = y_0\partial^2(\ldots)/\partial r^2+y_1\partial(\ldots)/r\partial r+y_2(\ldots)/r^2+y_3\partial^2(\ldots)/\partial z^2,$$
$$M_3(\ldots) = z_0\partial^2(\ldots)/\partial r^2+z_1\partial(\ldots)/r\partial r+z_2(\ldots)/r^2+z_3\partial^2(\ldots)/\partial z^2$$

с десятью пока не определенными коэффициентами x_0, y_0, y_1, y_2, z_0, z_1, z_2. Для определения десяти неизвестных коэффициентов получена система из двенадцати уравнений

$$x_0Y_0 = h,$$
$$Y_0 = y_0z_0,$$
$$x_0Y_1 + x_1Y_0 = a_0,$$
$$Y_1 = y_0z_1+ y_1z_0,$$
$$x_0Y_2 + (x_1-x_0)Y_1 = a_1,$$
$$Y_2 = y_0(z_2 - 2z_1)+ y_1z_1 + y_2z_0, \qquad (25a)$$
$$x_0Y_3 + (x_1- 2x_0)Y_2 = a_2,$$
$$Y_3 = y_0(2z_1 - 4z_2) + y_1(z_2 - z_1) + y_2z_1,$$
$$x_0Y_4 + (x_1- 3x_0)Y_3 = a_3,$$
$$Y_4 = 6y_0z_2 - 2y_1z_2 +y_2z_2,$$
$$(x_1- 4x_0)Y_4 = a_4,$$

$$x_0Z_0 = b_0,\ Z_0 = y_3z_0 + y_0z_3,\quad x_0Z_1 + x_1Z_0 = b_1,$$
$$Z_1 = y_3z_1 + y_1z_3, \qquad (25б)$$
$$x_0Z_2+(x_1-x_0)Z_1 = b_2,\quad Z_2 = y_3z_2+y_2z_3,\quad (x_1-2x_0)Z_2 = b_3,$$
$$x_0y_3z_3 = c_0,\quad x_1y_3z_3 = c_1, \qquad (25c)$$

полученная путем сравнения соответствующих коэффициентов уравнений (22) и (24). При этом правые части полученных уравнений известны. Они определяются равенствами (23).

Из (25с) следует

$$x_1 = x_0\, c_1/c_0 = x_0C.$$

Далее, последовательно определяя из (25а),(25б) неизвестные величины Y_i, Z_j, можно получать

$$Y_4 = a_4/(C-4)x_0,$$
$$Y_3 = [a_3 - a_4/(C-4)]/(C-3)x_0,$$
$$Y_2 = \{a_2-[a_3 - a_4/(C-4)]/(C-3)\}/(C-2)x_0, \quad (26a)$$
$$Y_1 = ((a_1-\{a_2-[a_3-a_4/(C-4)]/(C-3)\}/(C-2)))/(C-1)x_0,$$
$$Y_0=\{\{a_0-((a_1-\{a_2-[a_3-a_4/(C-4)]/(C-3)\}/(C-2)))/(C-1)\}/Cx_0$$

и

$$Z_2 = b_3/(C-2)x_0,$$
$$Z_1 = [b_2-b_3/(C-2)]/(C-1)x_0, \qquad (26б)$$
$$Z_0 = \{b_1-[b_2 - b_3/(C-2)]/(C-1)\}Cx_0.$$

Полученные соотношения (26) могут быть использованы для определения искомых коэффициентов, если тождественно выполняются следующие два условия:

$$x_0Y_0 = h,\ x_0Z_0 = b_0,$$

которые являются двумя последними уравнениями системы (25). Эти два условия в общем виде благодаря соотношениям (23) записываются в виде ограничений на характеристики материалов

$$(C-4)\langle\langle(C-3)\{(C-2)[(C-1)\,a_0 - a_1]+ a_2\} - a_3\rangle\rangle + a_4 =$$
$$= (C-4)(C-3)(C-2)(C-1)Ch,$$
$$(C-2)[(C-1)b_1-b_2] + b_3 = (C-2)(C-1)Cb_0. \quad (26c)$$

Если в соотношения (26с) подставить выражения коэффициентов из (23), то после несложных преобразований можно получить

$$(1-d/c)[(d/c)^2+d/c-\lambda^2] = 0 \quad \text{и} \quad \lambda^2-d/c = 0. \qquad (27)$$

Нетрудно видеть, что в соответствии с соотношениями (11) и (13) полученные равенства (27) тождественно выполняются для армированных в осевом направлении композиционных материалов и для цилиндров из изотропных материалов. Для ортотропных материалов соотношения (27) не могут быть выполнены. Поэтому в общем случае система уравнений (25) является переопределенной и несовместной. Переопределенная система уравнений (25) не позволяет представить уравнение пятого порядка (23) в виде произведения дифференциальных операторов более низкого порядка с действительными или комплексными коэффициентами при произвольных (независимых) упругих характеристиках ортотропного тела (2). Это обстоятельство привело к тому, что до настоящего времени нет аналитического решения задачи об осесимметричной деформации ортотропных цилиндров.

Проще обстоит дело для цилиндров из изотропных и трансверсально-изотропных материалов (композиционных материалов с направлением армирования вдоль оси цилиндра). В этих случаях параметры b, λ^2, c и d удовлетворяют условиям b =0, λ^2 =1, c = d, для которых коэффициенты a_i (i = 1,2,3,4,5), b_i (i = 0,1,2,3), c_0, c_1 заданы соотношениями (23). При этом два уравнения (26с) оказываются линейно зависимыми и десять независимых уравнений (26с) оказываются линейно не зависимыми. Десять независимых уравнений (25) в этих случаях позволяют найти десять неизвестных параметров x_0, x_1, y_0, y_1, y_2, y_3, z_0, z_1, z_2, z_3. В этих случаях удобно ввести неизвестные $s_i = y_i/y_0$ и $t_i=z_i/z_0$ и для их определения использовать уравнения

$$s_3+t_3 = Z_0/Y_0 = b_0/h,$$
$$s_3t_3 = c_0/Y_0= c_0/h = g/h,$$
$$s_1+t_1 = Y_1/Y_0 = a_0 - c_1/c_0 = 1,$$
$$t_3s_1+s_3t_1 = Z_1/Y_0 = (b_1-4b_0) = b_0/h, \qquad (28)$$
$$s_2+t_2 = Y_2/Y_0 + 2t_1 - s_1t_1= 2 + 2t_1 - s_1t_1,$$
$$t_3s_2 + t_3s_2 = Z_2/Y_0 = b_2/h-2(Z_1/Y_0) = 0.$$

Решение системы уравнений (28)

$$s_3 = 0{,}5\{b_0/h \pm [(b_0/h)^2 - 4g/h)^{0,5},$$
$$t_3 = 0{,}5\{b_0/h - (\pm1)[(b_0/h)^2 - 4g/h]^{0,5},$$
$$s_1 = -t_3/\Delta,\quad t_1 = s_3/\Delta,\quad \Delta = s_3-t_3, \qquad (29)$$
$$s_2 = s_3[2(1+s_1) - s_1t_1]/\Delta,$$
$$t_2 = -t_3[2(1+s_1) - s_1t_1]/\Delta.$$

Таким образом, в рассматриваемых случаях (трансверсально-изотропное и изотропное тела) уравнение (24) принимает вид

$$(\partial/\partial r+C/r)(\partial^2/\partial r^2+s_1\partial/r\partial r+s_2/r^2+s_3\partial^2/\partial z^2)(\partial^2 w/\partial r^2+$$
$$+t_1\partial w/r\partial r+t_2w/r^2+t_3\partial^2 w/\partial z^2) = 0.$$

Разрешающее уравнение относительно осевой компоненты перемещения w оказалось несколько сложнее, чем уравнение относительно радиальной компоненты u.

Для получения разрешающего интегрального уравнения относительно осевой w компоненты вектора перемещения для ортотропных тел используется уравнение (2), из которого следует, что

$$u = -(r^{-d/c}/c)\int[\int r^{d/c}Q(w)dr + F_3(z)]dz + \Phi_3(r), \quad (30)$$
$$u' = -(r^{-d/c}/c)\int r^{d/c}Q(w)dr + F_3(z),$$
$$u,_r = -(1/c)\int Q(w)dz + (d/c^2)(r^{-d/c-1})\times$$
$$\times\int[\int r^{d/c}Q(w)dr + F_3(z)]dz + \Phi_3,_r(r).$$

Здесь $F_3(z)$ и $\Phi_3(r)$, произвольные функции интегрирования.

Интегрируя первое уравнение системы (2), можно получить

$$ar^{b/a}w = -\int\{r^{b/a}[u,_r+(1-b/a)r^{-1}u]+(b/a+\lambda\lambda-1)^2 \times$$
$$\times \int r^{b/a-2}udr+F_4(z)\}dz-g\int r^{b/a}u'dr+\Phi_4(r). \quad (31)$$

Здесь $F_4(z)$ и $\Phi_4(r)$ – новые произвольные функции. Если вместо радиальной компоненты перемещения u и ее производных $u,_r$ и u' подставить их значения, определенные из (30) через осевую компоненту перемещения w, то можно записать окончательное интегральное уравнение относительно осевой компоненты вектора перемещения.

Приведенные уравнения в виде дифференциальных уравнений в частных производных и интегральные уравнения относительно отдельных компонентов вектора перемещений могут быть использованы в разработке численно-аналитических методов решения задач напряженно-деформированного состояния ортотропных, трансверсально-изотропных и изотропных цилиндров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Носатенко П.Я.* Численное решение трехмерных задач неосесимметричной деформации слоистых анизотропных оболочек вращения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. №2. С. 43-51.

2. *Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А.* Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высшая школа, 1975. 526 с.

3. *Носатенко П.Я., Ширшов Ю.Ю.* Пространственное НДС перекрестно армированных оболочек вращения при нагреве // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 6. С. 965-975.

4. *Андреев А.Н., Немировский Ю.В.* Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Новосибирск: Наука, 2001. 287с.

5. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

Резюме

Кернеулік және орын ауыстыру векторларының жеке құраушыларына қатысты жазылған дифференциалдық шешуші теңдеулер алынған. Оларды ортотроптық, транс- версальды-изотроптық және изотроптық цилиндрлердің кернеулік есептерін сандық-аналитикалық әдіспен шешуде пайдалануға болады.

УДК 539.3

Поступила 5.01.06г.

А. М. САРСЕНБИ

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ БАЗИСНОСТИ РИССА КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Установлены необходимые и достаточные условия базисности Рисса несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка.

1. Введение. Для полноты изложения напомним ряд известных определений и результатов. Две системы функций $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ из L_2 называются биортогонально сопряженными на некотором отрезке $[a, b]$, если

$$\left(u_i, \upsilon_k\right) = \int_a^b u_i \bar{\upsilon}_k dx = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Систему функций $\{u_k(x)\}$ называют минимальной, если ни одна из функций этой системы не входит в линейную оболочку остальных функций той же системы.

Если система $\{u_k(x)\}$ минимальна, то для нее существует биортогонально сопряженная система $\{\upsilon_k(x)\}$. Если к тому же система $\{u_k(x)\}$ полна, то биортогонально сопряженная система определяется однозначно.

Произвольная функция $f(x) \in L_2$ имеет два биортогональных разложения:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x), \text{ где } c_n = (f, \upsilon_n);$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} d_n \upsilon_n(x), \text{ где } d_n = (f, u_n).$$