ЛИТЕРАТУРА

1. *Бари Н.К.* // Ученые записки. М.: МГУ, 1951. Т. 4, вып. 142. С. 69-106.
2. *Качмаж С.Г., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М., 1958.
3. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
4. *Ильин В.А.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, №5. С. 789-793.
5. *Ильин В.А.* // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, №9. С. 1516-1529.
6. *Ионкин Н.И.* // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, №2. С. 294-304.
7. *Керимов Н.Б.* // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, №6. С. 943-953.
8. *Ильин В.А.* // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, №12. С. 2059-2071.
9. *Тихомиров В.В.* // ДАН СССР. 1983. Т. 274, №4. С. 807-810.

Резюме

Өз-өзіне түйіндес емес екінші ретті дифференциалдық операторлардың түпкілікті векторларының Рисс базисі болуы үшін қажетті және жеткілікті болатын шарттар келтірілген.

Summary

Necessary and sufficiently conditions of Riss basis of roots functions in norm terms for other spaces7

УДК 517.927.25

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент *Поступила 2.02.06г.*

Б. И. ЖУРСЕНБАЕВ, Ж. К. ЕСОВА, Г. Ш. БЕКЕТОВ, Б. Ш. БЕКЕТОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ ВЫСОКИХ КЛАССОВ

Для изучения динамики механизмов высоких классов (МВК) необходимо иметь расчетные механические модели, с достаточной точностью описывающие свойства реальных машин. Выбор расчетной модели в каждом конкретном случае определяется классом механизма.

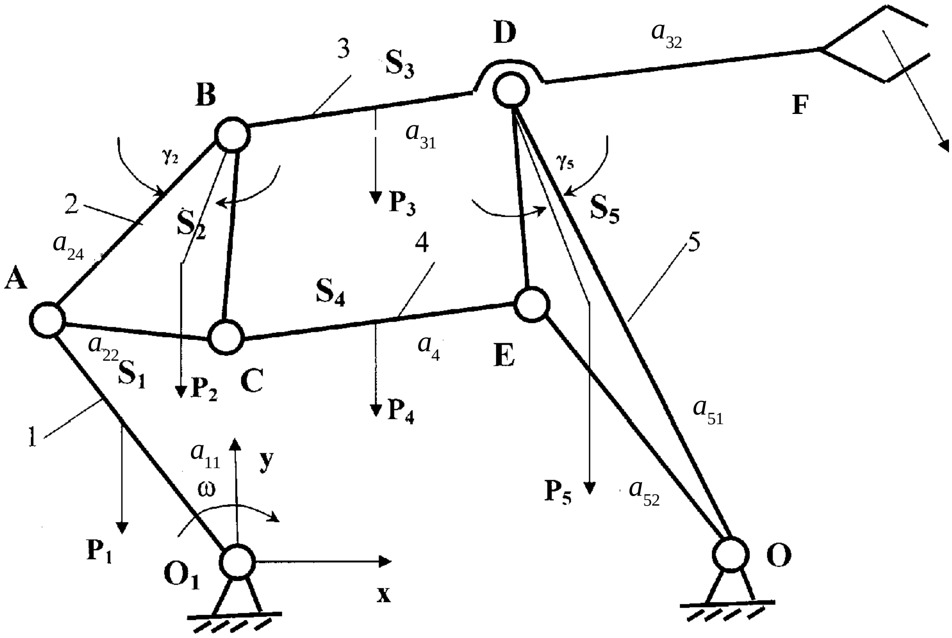
В наиболее простых моделях считаются, что все детали механизма – абсолютно твердые тела. Кинематические пары предполагаются идеальными, трение в них пренебрегается. Эти модели с приемлемой степенью точности отражают свойства реальных машин [1].

В исследовании динамики механических систем одним из возможных методов описания динамической модели является метод, основанный на использовании уравнений Лагранжа второго рода. Этот метод применим для любых голономных механических систем с конечным числом степеней свободы, в том числе и для систем, содержащих деформируемые элементы (пружины, упругие стержни и т.п.), если можно пренебречь их инерционностью.

В принципе в качестве уравнений движения МВК могут применяться другие формы уравнений динамики: уравнения Гамильтона, уравнение Рауса, уравнение Эйлера–Лагранжа и др. [2]. Уравнения движения могут быть составлены также путем применения к отдельным элементам механизма теорем механики об изменении количества движения и момента количества движения. Существуют также подходы к описанию динамики МВК, не требующие составления дифференциальных уравнений движения, а основанные на непосредственном использовании вариационных принципов механики [3].

В случае многозвенных МВК реализация любого из методов составления уравнений движения приводит к необходимости выполнять утомительные аналитические выкладки. Сами же уравнения получаются очень громоздкими. В связи с этим перспективным представляется использование ЭВМ для проведения аналитических преобразований при составлении уравнений движения.

Вывод уравнений динамики движения методом Лагранжа-Эйлера отличается простотой и единством подхода. Этот подход приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка и отражает эффекты, связанные с действием сил инерции, обусловленных ускоренным движением звеньев, действием кориолисовых и центробежных сил, а также действием сил тяжести. Эти уравнения обеспечивают строгое описание динамики состояния механизма и используются для разработки усовершенствованных законов управления в пространстве



Механизм четвертого класса

присоединенных переменных. Совместное использование матричного преобразования Денавита-Хартенберга и метода Лагранжа приводит к компактной векторно-матричной форме уравнений движения, удобной для аналитического исследования и допускающей реализацию на ЭВМ. Если известны решения обратной задачи кинематики, то и известны обобщенные координаты, позволяющие придать рабочей точке положение и ориентацию относительно базовой системы координат.

Уравнения динамики движения механической системы методом Лагранжа-Эйлера основаны на использовании уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \; i = 1,\ldots, 5, \qquad (1)$$

где L – функция Лагранжа, L=K–П; K – кинетическая энергия механической системы; П – потенциальная энергия механической системы; q_i – обобщенные координаты механической системы; $\dot{q}_i$ – первая производная по времени обобщенных координат; Q_i – обобщенные силы (или моменты), создаваемые в i-м сочленении для реализации заданного движения i-го звена.

Для того чтобы воспользоваться уравнениями Лагранжа–Эйлера, необходимо знать кинетическую энергию рассматриваемой физической системы, а следовательно, и скорости всех ее точек с учетом движения всех сочленений механизма.

Зная скорость произвольной точки каждого звена механизма, найдем кинетическую энергию i-го звена. Обозначим через K_i кинетическую энергию элемента массы dm i-го звена. Тогда

$$dK_i = 1/2(x^2+y^2+z^2)dm = \qquad (2)$$
$$= 1/2\text{след}(\dot{r}_i J_i \dot{r}^T_i)dm = 1/2\text{tr}(\dot{r}_i J_i \dot{r}^T_i)dm.$$

Здесь вместо скалярного произведения используется оператор tr (след матрицы), что в дальнейшем позволит перейти к матрице инерции J_i i-го звена. Подставляя в выражение (2) значение v_i, получаем:

$$K = \Sigma K_i = 1/2\Sigma\text{tr}(\Sigma\Sigma U_{ip} J_i U^T_{ir} \dot{q}_p \dot{q}_r) =$$
$$= 1/2\Sigma\Sigma\Sigma[\text{tr}(U_{ip} J_i U^T_{ir}) \dot{q}_p \dot{q}_r], \qquad (3)$$

следовательно, кинетическая энергия механизма равна арифметической сумме кинетической энергии всех его звеньев:

$$K = 1/2\Sigma\text{tr}(\dot{r}_i J_i \dot{r}^T_i), \qquad (4)$$

где

$$J_i = \begin{bmatrix} J^{(i)}_{XX} & J^{(i)}_{XY} & J^{(i)}_{XZ} & m_i x^*_i \\ J^{(i)}_{YX} & J^{(i)}_{YY} & J^{(i)}_{YZ} & m_i y^*_i \\ J^{(i)}_{ZX} & J^{(i)}_{ZY} & J^{(i)}_{ZZ} & m_i z^*_i \\ m_i x^*_i & m_i y^*_i & m_i z^*_i & m_i \end{bmatrix} - \qquad (5)$$

матрица инерции i-го звена, m_i – масса i-го звена; x^*_i, y^*_i, z^*_i – координаты центра тяжести i-го звена в собственной системе координат; $J^{(i)}_{xx}$, $J^{(i)}_{yy}$, $J^{(i)}_{zz}$ – элементы тензора инерции i-го звена относительно собственных осей.

Величины J_i зависят только от распределения массы i-го звена в i-й системе координат и не зависят ни от положения, ни от скорости звеньев. Это позволяет, вычислив матрицы J_i, использовать полученные значения в дальнейшем для вычисления кинетической энергии механизма.

Используя полученные выражения, для первого звена напишем:

$$K_1 = 1/2\Sigma t2(\dot{T}_1 J_1 \dot{T}_1 T), \quad (6)$$

где

$$\dot{T}_1 = U_{11}\dot{q}_1 = HA^{\circ}_1 \dot{q}_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} -S_{11} & -C_{11} & 0 & -a_{11}S_{11} \\ C_{11} & -S_{11} & 0 & a_{11}C_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1$$

или

$$K_1 = 1/2\mathrm{tr}\begin{bmatrix} -S_{11}q_1 & -C_{11}q_1 & 0 & -a_{11}S_{11}q_1 & \\ -C_{11}q_1 & -S_{11}q_1 & 0 & -a_{11}S_{11}q_1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} J^1_{XX} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J^1_{YY} & 0 & m_1 y^*_1 \\ 0 & 0 & J^1_{ZZ} & 0 \\ 0 & 0 & m_1 y^*_1 & m_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -S_{11}q_1 & C_{11}q_1 & 0 & 0 \\ -C_{11}q_1 & -S_{11}q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{11}S_{11}q_1 & -a_{11}C_{11}q_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (2J^1_Z + m_1 a_{11}^2)\dot{q}_1^2/2.$$

Таким образом,

$$K_1 = (2J^1_Z + m_1 a_{11}^2)\dot{q}_1^2/2, \quad (7)$$

причем J^1_z получено с учетом $J^1_{xx} + J^1_{yy} = J^5_z$,
где J^5_z – осевой момент инерции звена 1 относительно оси z_1.

Аналогично, для второго звена механизма,

$$K_2 = (2J^1_Z + m_1 a_{11}^2)\dot{q}_1^2/2. \quad (8)$$

$$K_3 = 1/2(2J^3_z + m_3 a_3^2)\dot{q}_1^2/2, \text{ где } a_3 = a_{31} + a_{32}. \quad (9)$$

(9) – кинетическая энергия третьего звена механизма.

Кинетическая энергия четвертого звена будет

$$K_4 = 1/2(2J^4_z + m_4 a_4^2)\dot{q}_1^2/2.$$

Для пятого звена находим

$$K_5 = 1/2(2J^5_z + m_5 a_{53}^2)\dot{q}_1^2/2.$$

Полную кинетическую энергию механизма четвертого класса получаем, складывая арифметически K_1, K_2, K_3, K_4 и K_5:

$$K_M = \left(J_z^1 + \frac{m_1 a_{11}^2}{2} + J_z^2 + \frac{m_2 a_{22}^2}{2} + J_z^3 + \frac{m_3 a_3^2}{2} + \right.$$

$$\left. + J_z^4 + \frac{m_4 a_4^2}{2} + J_z^5 + \frac{m_5 a_{53}^2}{2} + J_z^6 + \frac{m_6 a_6^2}{2} + J_z^7 \right) q_1^2. \quad (10)$$

Полная потенциальная энергия, связанная с весом механизма, определяется как сумма всех потенциальных энергий отдельных звеньев. Потенциальная энергия i-го звена механизма в поле сил тяжести

$$\mathbf{\Pi}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{y}^*_o, \quad (11)$$

где $\mathbf{P}_i$ – сила тяжести i-го звена; $\mathbf{y}^*_o$ – координата по оси y центра тяжести i-го звена.

Для первого звена:

$$\mathbf{\Pi_1} = -m_1[-g(y^*_1 c_{11} - a_{11}s_{11})] = \mathbf{P_1}(y^*_1 c_{11} + a_1 s_{11}).$$

Для вычисления потенциальных энергий остальных звеньев нужны матрицы T_2, T_3, T_4 и T_5.

Тогда потенциальные энергии для этих звеньев будут

$$\mathbf{\Pi_2} = \mathbf{P_2}[y^*_2(-S_{11}S_{22}+C_{11}C_{22})+a_{22}(\mathbf{S_{11}}C_{22+}S_{22}C_{11})+a_{11}S_{11}];$$

$$\mathbf{\Pi}_3 = \mathbf{P_3}[(a_{31}C_{31}-S_{31})(S_{11}C_{21}+C_{11}S_{21})-$$
$$-(a_{31}S_{31}+C_{31})(S_{11}S_{21}-C_{11}C_{21})+(a_{11}+a_{21})S_{11}+a_{21}C_{11}S_{21}];$$

$$\mathbf{\Pi_4} = \mathbf{P_4}[(a_{11}C_{11}-S_{11})(S_{11}C_{22}+C_{11}S_{22})+$$
$$=(a_4S_4+C_4)(-S_{11}S_{22}+C_{11}C_{22})+(a_{11}+a_{22})S_{11}+a_{22}C_{11}];$$

$$\mathbf{\Pi_5} = \mathbf{P_5}[a_{53}(S_{53}+C_{53})[C_4(S_{11}C_{22}+C_{11}S_{22})+$$
$$+S_4(-S_{11}S_{22}+C_{11}C_{22})]-S_4(S_{53}-C_{53})(C_{11}C_{22}-S_{11}S_{22})-$$
$$-C_4(S_{53}-C_{53})(S_{11}C_{22}+C_{11}S_{22})+a_4[C_4(S_{11}C_{22}+C_{11}S_{22})+$$
$$+S_4(-S_{11}S_{22}+C_{11}C_{22})+a_{22}(S_{11}C_{22}+C_{11})+a_{11}S_{11}.$$

Суммируя, получаем полную потенциальную энергию механизма:

$$\mathbf{\Pi_м} = \mathbf{P_1}(-y^*_1 S_{11}+a_{11}C_{11})\dot{\theta}_{11} + \mathbf{P_2}[y^*_2(-C_{11}S_{22}+S_{11}C_{22})+$$
$$+a_{22}(C_{11}C_{22}+S_{22}S_{11})+a_{11}C_{11}]\dot{\theta}_{11} + \mathbf{P_3}[(a_{31}C_{31}-S_{31})\times$$
$$\times(C_{11}C_{21}-S_{11}S_{21})-(a_{31}S_{31}+C_{31})(C_{11}S_{21}+S_{11}C_{21})+$$
$$+(a_{11}+a_{21})C_{11}-a_{21}S_{11}S_{21}]\dot{\theta}_{11} + \mathbf{P_4}[(a_4C_4-S_4)\times$$
$$\times(C_{11}C_{22}+C_{11}S_{22})+(a_4S_4+C_4)(-C_{11}S_{22}-S_{11}C_{22})+$$
$$+(a_{11}+a_{22})C_{11}+a_{22}S_{11}]\dot{\theta}_{11} + \mathbf{P_5}[a_{53}(S_{53}+C_{53})\times$$
$$\times[C_4(C_{11}C_{22}-S_{11}S_{22})+S_4(-C_{11}S_{22}+S_{11}C_{22})]-S_4(S_{53}-C_{53})\times$$
$$(-S_{11}C_{22}-C_{11}S_{22})-C_4(S_{53}-C_{53})(C_{11}C_{22}+S_{11}S_{22})+$$
$$+a_4[C_4(C_{11}C_{22}+ +S_{11}S_{22})+S_4(-S_{11}S_{22}+S_{11}C_{22})+$$
$$+a_{22}(C_{11}C_{22}-S_{11})+a_{11}C_{11}]\dot{\theta}_{11}. \quad (12)$$

Если выражения кинетической и потенциальной энергий для механизма подставить в формулу (1), то получим уравнения движения его механической системы.

Дальнейшее преобразования нацелены на то, чтобы записать уравнение (1) в матричном виде, удобном для программирования. Уравнения движения механизма представляют собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Эти уравнения учитывают все действующие на звенья механизма четвертого класса силы и моменты: инерциальные, центробежные, кориолисовы и гравитационные. Для анализа свободных колебаний механической системы механизма относительно некоторой конфигурации при полностью остановленном приводе, т.е. приравнивая силы (моменты) к нулю, после некоторых преобразований можно привести в общем виде к однородным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{A}\ddot{q} + \mathbf{C}q = 0, \qquad (13)$$

где **A** – матрица инерционных коэффициентов; **C** – матрица жесткостных коэффициентов.

Общее решение системы дифференциальных уравнений (13) записывается в виде суммы частных решений

$$q(\mathrm{t}) = \sum_{i=1}^{5} \mathrm{a}_i\, \mathrm{b}^i \sin(\omega_i \mathrm{t} + \delta_i), \qquad (14)$$

где b^i – амплитудный вектор; ω_i – частота колебаний; δ_i – начальная фаза колебаний.

Здесь a_i, δ_i – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. Начальные условия при свободных колебаниях в общем случае не известны. Для расчета возьмем начальные условия

$$q_o = 0, \quad \dot{q}_o = 0,$$

где q_o определяют из условия статического равновесия для заданной конфигурации.

Формула (14) описывает свободные колебания звеньев механизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джолдасбеков У.А.* Теория механизмов высоких классов. Алматы: Ғылым, 2001. 427 с.

2. Механика промышленных роботов: Учеб. пособ. для втузов: В 3-х кн. / Под ред. К. Б. Фролова, Е. И. Воробьева. М.: Высшая школа, 1988.

3. *Кобринский А.А.* и др. Манипуляционные системы роботов. М.: Наука, 1985.

Резюме

Жоғарғы класс механизмдерінің динамикасын теориялық зерттеу үшін, құрылымдық параметрлерін анықтау үшін есептік механикалық моделін таңдап алу қажет. Бұл таңдау әр кезде механизмнің кинематикалық сұлбасына, механикалық қасиеттеріне байланысты өзгеріп отырады.

Жоғарғы класс механизмнің динамикалық моделі Лагранждың екінші текті теңдеулерін қолдану арқылы зерттелген.

Summary

For theoretical study of dynamics, the definitions of design data are necessary for having settlement mechanical models. The choice of settlement model in each concrete case is defined by the circuit of the mechanism, mechanical properties.

In clause the dynamic model of the mechanism is investigated on the basis of use of the equations Lagrange of the second sort.

УДК 621.01

Поступила 10.02.06г.