О. КАНЛЫБАЕВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНОГО ИЗ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К СИНТЕЗУ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ ВЫСОКИХ КЛАССОВ

Рассмотрим задачу синтеза механизма VI класса общего вида в соответствии с рисунком по шести заданным положениям входных звеньев 1, 2 и выходного звена 7:

$$\varphi_{1i} = \varphi_{1i}(t), \quad \varphi_{2i} = \varphi_{2i}(t) \quad \text{и} \quad \psi_{7i} = \psi_{7i}(t), \quad i = \overline{1,6}. \tag{1}$$

Для решения задачи синтеза используем метод интерполирования. Обычно число узлов интерполирования принимается равным числу искомых параметров. В данном случае число узлов интерполирования равно шести, поэтому будем рассматривать задачу синтеза по шести параметрам. Для решения задачи синтеза использовано выражение взвешенной разности [1]

$$\Delta q = l_4^2 - l_{4\phi}^2, \tag{2}$$

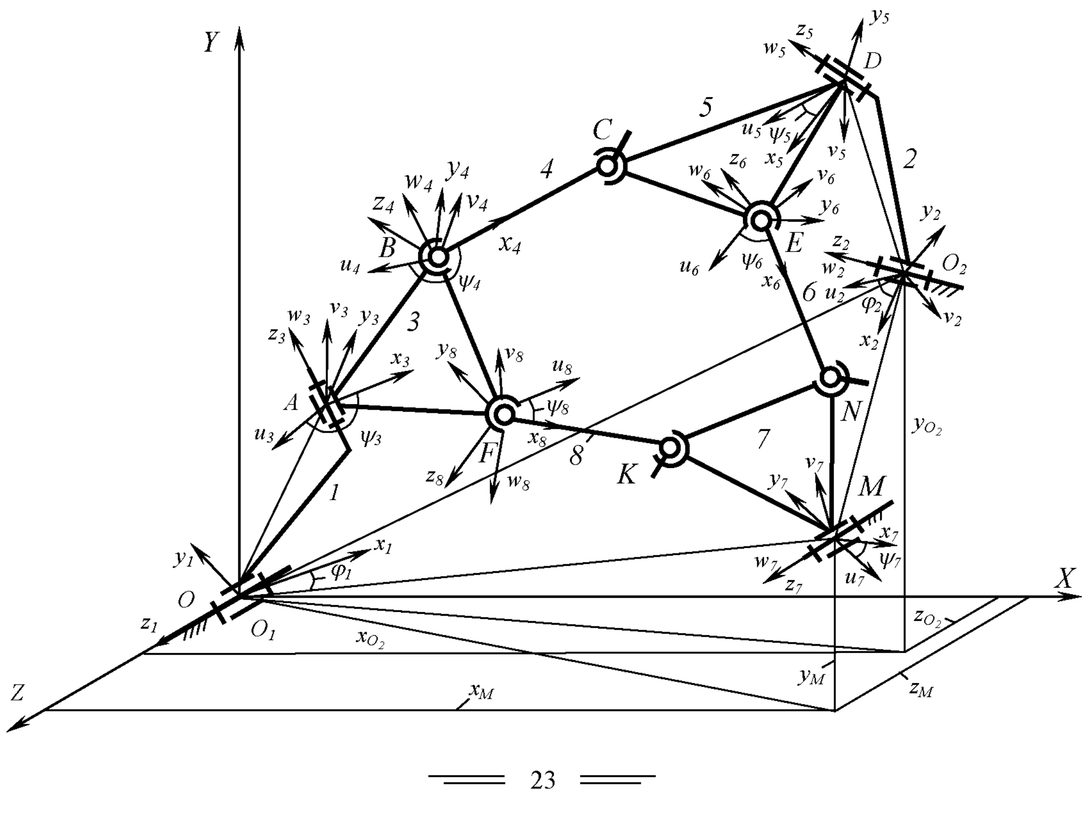
где $l_{4\phi}$ – расстояние между точками B и C звена 4 механизма:

$$l_{4\phi}^2 = (X_B - X_C)^2 + (Y_B - Y_C)^2 + (Z_B - Z_C)^2,$$

X_B, Y_B, Z_B, X_C, Y_C, Z_C – соответствующие координаты точек B и C звена 4(BC) в неподвижной системе координат $OXYZ$. Для вычисления шести линейных геометрических параметров из набора 13 линейных геометрических параметров кинематической цепи $ABCD$ [2] определим число вариантов из шести параметров [3] с учетом того, что длина l_4 звена 4 входит во все варианты:

$$C_{12}^5 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 792 \text{ варианта.}$$

Решение задачи синтеза шести геометрических параметров рассмотрим на примере одного из полученных вариантов: a_{52}, x_{3B}, z_{3B}, x_{5C}, z_{5C}, l_4.



$$\Delta q \quad p_1 f_1(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) + p_2 f_2(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) +$$
$$+p_3 f_3(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) + p_4 f_4(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) +$$
$$+p_5 f_5(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) + p_6 f_6(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) +$$
$$+p_1 p_2 f_7(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) + p_1 p_3 f_8(\varphi_1, \psi_4, \varphi_7, \psi_6) +$$
$$+p_1 p_5 f_9(\varphi_1, \psi_4, \varphi_7, \psi_6) + p_2 p_3 f_{10}(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) +$$
$$+p_2 p_4 f_{11}(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) + p_3 p_4 f_{12}(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) -$$
$$-F(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5). \qquad (3)$$

При решении задачи синтеза по методу интерполирования для шести заданных положений механизма отклонения взвешенной разности Δq должны равняться нулю. С учетом этого из выражения (3) имеем

$$p_1 f_1(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) + p_2 f_2(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) +$$
$$+p_3 f_3(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) + p_4 f_4(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) +$$
$$+p_5 f_5(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) + p_6 f_6(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) +$$
$$+p_1 p_2 f_7(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) + p_1 p_3 f_8(\varphi_1, \psi_4, \varphi_7, \psi_6) +$$
$$+p_1 p_5 f_9(\varphi_1, \psi_4, \varphi_7, \psi_6) + p_2 p_3 f_{10}(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) +$$
$$+p_2 p_4 f_{11}(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) + p_3 p_4 f_{12}(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) -$$
$$-F(\varphi_1, \psi_7, \varphi_2, \psi_5) \quad 0, \; i \quad \overline{1,6}. \qquad (3)$$

Исключим из системы уравнений (3) неизвестное p_6. Получим

$$b_{1i} p_1 + b_{2i} p_2 + b_{3i} p_3 + b_{4i} p_4 + b_{5i} p_5 + b_{6i} p_1 p_2 +$$
$$+b_{7i} p_1 p_3 + b_{8i} p_1 p_5 + b_{9i} p_2 p_3 + b_{10i} p_2 p_4 + b_{11i} p_3 p_4 = B_i,$$
$$i = \overline{1,5};$$

где

$$b_{ji} = f_{ji}(\varphi_{1i}, \psi_{4i}, \varphi_{7i}, \psi_{6i}) - f_{j,6}(\varphi_{16}, \psi_{46}, \varphi_{76}, \psi_{66}),$$
$$i = j = \overline{1,5},$$
$$b_{j+1,i} = f_{j+1,i}(\varphi_{1i}, \psi_{4i}, \varphi_{7i}, \psi_{6i}) - f_{j+1,6}(\varphi_{16}, \psi_{46}, \varphi_{76}, \psi_{66}),$$
$$j = \overline{6,11},$$
$$B_i = F(\varphi_{1i}, \psi_{4i}, \varphi_{7i}, \psi_{6i}) - F(\varphi_{1,6}, \psi_{4,6}, \varphi_{76}, \psi_{6,6}). \qquad (4)$$

Систему (4) из трех уравнений при $i = 1, 2$ и $i = j$ представим в матрично-векторной форме [4] и запишем

$$T_{j3}(p_3, p_5) p_2^3 + T_{j2}(p_3, p_5) p_2^2 + T_{j1}(p_3, p_5) p_2 +$$
$$+T_j(p_3, p_5) \quad 0 = j \quad 4,5,6, \qquad (5)$$

где

$$T_{j3}(p_3, p_5) = p_2^3 (p_3 \gamma_{j19} + \gamma_{j17});$$
$$T_{j2}(p_3, p_5) =$$
$$= p_2^2 (\gamma_{j12} p_3^2 + \gamma_{j10} p_3 + \gamma_{j15} p_5 + \gamma_{j22} p_3 p_5 + \gamma_{j7});$$

$$T_{j1}(p_3, p_5) =$$
$$= \begin{pmatrix} \gamma_{j20} p_3^3 + \gamma_{j11} p_3^2 + \gamma_{j4} p_3 + \gamma_{j16} p_5^2 + \gamma_{j5} p_5 + \\ + \gamma_{j23} p_3^2 p_5 + \gamma_{j21} p_3 p_5 + \gamma_{j1} \end{pmatrix};$$

$$T_{j0}(p_3, p_5) = (\gamma_{j18} p_3^3 + \gamma_{j8} p_3^2 + \gamma_{j2} p_3 + \gamma_{j9} p_5^2 +$$
$$+ \gamma_{j3} p_5 + \gamma_{j13} p_3^2 p_5 + \gamma_{j6} p_3 p_5 + \gamma_{j14} p_3 p_5^2 + \gamma_{j0}).$$

Коэффициенты $\{\gamma_{j,m}\}$, $(j = 3,4,5; \quad m = \overline{1,23})$ системы алгебраических уравнений (5) не содержат неизвестных p_1, p_4.

Исключая неизвестное p_2 из системы алгебраических уравнений (5), получаем два уравнения относительно неизвестных p_3, p_5:

$$\begin{bmatrix} T_{40}(p_3,p_5) & T_{41}(p_3,p_5) & T_{42}(p_3,p_5) & T_{43}(p_3,p_5) & 0 \\ T_{50}(p_3,p_5) & T_{51}(p_3,p_5) & T_{52}(p_3,p_5) & T_{53}(p_3,p_5) & 0 \\ T_{60}(p_3,p_5) & T_{61}(p_3,p_5) & T_{62}(p_3,p_5) & T_{63}(p_3,p_5) & 0 \\ 0 & T_{40}(p_3,p_5) & T_{41}(p_3,p_5) & T_{42}(p_3,p_5) & T_{43}(p_3,p_5) \\ 0 & T_{50}(p_3,p_5) & T_{51}(p_3,p_5) & T_{52}(p_3,p_5) & T_{52}(p_3,p_5) \end{bmatrix} =$$
$$= 0, \qquad (6)$$

$$\begin{bmatrix} T_{40}(p_3,p_5) & T_{41}(p_3,p_5) & T_{42}(p_3,p_5) & T_{43}(p_3,p_5) & 0 \\ T_{50}(p_3,p_5) & T_{51}(p_3,p_5) & T_{52}(p_3,p_5) & T_{53}(p_3,p_5) & 0 \\ T_{60}(p_3,p_5) & T_{61}(p_3,p_5) & T_{62}(p_3,p_5) & T_{63}(p_3,p_5) & 0 \\ 0 & T_{40}(p_3,p_5) & T_{41}(p_3,p_5) & T_{42}(p_3,p_5) & T_{43}(p_3,p_5) \\ 0 & T_{60}(p_3,p_5) & T_{61}(p_3,p_5) & T_{62}(p_3,p_5) & T_{63}(p_3,p_5) \end{bmatrix} =$$
$$= 0. \qquad (7)$$

Каждое уравнение (6) и (7) представляет собой многочлен от двух неизвестных p_3, p_5. Левая часть уравнения (6) представляет собой алгебраическое уравнение 11 степени относительно неизвестного p_3 [4].

$$\sum_{s=0}^{11} \tau_s \cdot p_1^s = 0, \qquad (8)$$

где τ_0, τ_1, …, τ_{11} выписываются через $\{\gamma_{j,m}\}$, $(j = 4{,}5; \quad m = 1{,}23)$.

Это уравнение 11 степени относительно неизвестного p_3 имеет вид

$$S_{11}(p_5^3) p_3^{11} + S_{10}(p_5^5) p_3^{10} + S_9(p_5^5) p_3^9 + S_8(p_5^5) p_3^8 +$$
$$+S_7(p_5^5) p_3^7 + S_6(p_5^5) p_3^6 + S_5(p_5^5) p_3^5 + S_4(p_5^5) p_3^4 +$$
$$+S_3(p_3^3) p_3^3 + S_2(p_5^5) p_3^2 + S_1(p_5^5) p_3 + S_0(p_5^5) = 0.$$

Левая часть уравнения (8) представляет собой аналогичное алгебраическое уравнение 11 степени относительно неизвестного p_3.

$$\sum_{s=0}^{11} h_s \cdot p_1^s = 0, \qquad (9)$$

где h_0, h_j, …, h_{11} выражаются через $\{\gamma_{j,m}\}$, $(j = 4{,}5;\quad m = \overline{1{,}23})$.

Это уравнение 11 степени относительно неизвестного p_3 имеет вид

$$H_{11}\left(p_5^3\right)p_3^{11} + H_{10}\left(p_5^5\right)p_3^{10} + H_9\left(p_5^5\right)p_3^9 + H_8\left(p_5^5\right)p_3^8 +$$
$$+H_7\left(p_5^5\right)p_3^7 + H_6\left(p_5^5\right)p_3^6 + H_5\left(p_5^5\right)p_3^5 + H_4\left(p_5^5\right)p_3^4 +$$
$$+H_3\left(p_5^3\right)p_3^3 + H_2\left(p_5^5\right)p_3^2 + H_1\left(p_5^5\right)p_3 + H_0\left(p_5^5\right) = 0.$$

Анализ уравнений (8) и (9) приводит к степенным уравнениям относительно неизвестного p_3. Исключая неизвестное p_3 из систем уравнений (8) и (9), получаем многочлен 108 степени, который представляет собой алгебраическое уравнение 108 степени относительно неизвестного p_5.

$$\sum_{k=0}^{108} s_k \cdot p_6^k = 0, \tag{10}$$

где k_0, k_1, k_3, …, k_{108} выражаются через составляющие уравнений (8) и (9)

$$S_{11}\left(p_5^3\right), S_{10}\left(p_5^5\right), S_9\left(p_5^5\right), \ldots, S_0\left(p_5^5\right),$$
$$H_{11}\left(p_5^3\right), H_{10}\left(p_5^5\right), H_9\left(p_5^5\right), \ldots, H_0\left(p_5^5\right).$$

Решив уравнение (10), найдем вещественные решения относительно неизвестного p_5. Число вещественных решений уравнения (10) определяется по теореме Штурма [4]. Для положительных вещественных значений неизвестного параметра p_5 вычислим значения остальных параметров p_1, p_2, p_3, p_4, p_6. Выберем варианты для указанных параметров, в которых все параметры имеют положительные значения. Определим неизвестные геометрические параметры рассматриваемой кинематической цепи *ABCD* механизма по формулам:

$$x_{3B} = p_1, \quad a_{52} = p_2$$
$$x_{5C} = p_3, \quad z_{3B} = p_4$$
$$z_{5C} = p_5,$$
$$l_4 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 - p_6}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А.* Синтез плоских механизмов. М.: Госиздат, 1959. 1084 с.
2. *Саткалиева М.О.* Уравнения преобразования кинематических цепей пространственного рычажного механизма VI класса // Доклады НАН РК. Алматы, 2004. Вып. № 5. С. 9-12.
3. *БронштейнИ.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1986. 544 с.
4. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М., 2003. 431 с.

Резюме

Жоғарғы класты кеңістікті механизмдердің параметрлерінің синтез есебіне пайдаланған үш белгісіздері бар дәрежелі теңдеулер жүйелерінің бір белгісізін шығару жолы қарастырылған. VI кеңістікті механизмнің жетекші буыны мен шығыс буынның берілген жеті жағдайына байланысты осы механизмнің жеті параметрлерінің синтез есебінің шешуі көрсетілген.

Summary

The exclusion of unknown from the system of three power equations with three unknowns while solving task of synthesis of parameters is considered. Solving of task of the synthesis of seven parameters of a spatial mechanism of V class upon seven set positions of input and output links is shown.

УДК 621.01:531

Казахский национальный университет им. аль-Фараби

Поступила 3.10.05г.