

О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЗАДАЧАХ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРОВ

В связи с широким применением и большими возможностями компьютерной техники появляется возможность решения прикладных задач численными методами и методами, в которых рационально сочетаются численные и аналитические методы, то есть возникает необходимость разработки численно-аналитических методов решения задач механики деформируемого твердого тела, в том числе методов решения задач напряженно-деформированного состояния ортотропных цилиндров [1–4]. Следовательно, представляют интерес различные формы разрешающих уравнений, полученные относительно отдельных компонентов вектора перемещений и напряжений. Такие соотношения могут быть записаны в виде дифференциальных или интегральных уравнений, удобных для исследования как отдельных, так и общих особенностей поведения ортотропных цилиндров. Ниже приведены некоторые

дифференциальные и интегральные уравнения, полученные относительно отдельных компонентов вектора перемещений.

Задача об осесимметричной деформации полого ($r_a \leq r \leq r_b$) цилиндра конечной длины $0 \leq z \leq L$ из ортотропного материала формулируется следующим образом. Необходимо найти решение уравнений равновесия

$$\begin{aligned} r(\sigma_r)_{,r} + \sigma_r - \sigma_\varphi + r(\sigma_{rz})' &= 0, \\ r(\sigma_{rz})_{,r} + \sigma_{rz} + r(\sigma_z)' &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ортотропного цилиндра [5], для которого компоненты тензора деформаций определяются из следующих физических и кинематических соотношений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = (u)_{,r} &= (\sigma_r - \nu_{r\varphi} \sigma_\varphi - \nu_{rz} \sigma_z) / E_r, \\ \varepsilon_\varphi = u/r &= (-\nu_{\varphi r} \sigma_r + \sigma_\varphi - \nu_{\varphi z} \sigma_z) / E_\varphi, \\ \varepsilon_z = (w)' &= (-\nu_{zr} \sigma_r - \nu_{z\varphi} \sigma_\varphi + \sigma_z) / E_z, \\ \varepsilon_{rz} = (u)' + (w)_{,r} &= \sigma_{rz} / G_{rz}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ и σ_{rz} – радиальная, окружная, осевая и касательная компоненты тензора напряжений, $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z$ и ε_{rz} – соответствующие компоненты тензора деформаций, u, w – компоненты (радиальная и осевая) вектора перемещений. Кроме того, производные по радиальной координате r обозначены $(\dots)_r$, а по осевой z – $(\dots)'$. Для ортотропного тела имеют место связи

$$\begin{aligned} v_{r\varphi} / E_r &= v_{\varphi r} / E_\varphi, \quad v_{rz} / E_r = v_{zr} / E_z, \\ v_{\varphi z} / E_\varphi &= v_{z\varphi} / E_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Если в общем случае деформирования ортотропное тело имеет девять независимых упругих констант [5], то при осесимметричной деформации из них участвуют только семь постоянных – модули упругости в радиальном E_r , кольцевом E_φ и осевом направлении E_z , коэффициенты Пуассона $v_{r\varphi}, v_{rz}$ и $v_{\varphi z}$, характеризующие сжатие в направлении второго индекса при растяжении в направлении первого индекса, и модуль сдвига G_{rz} .

Ниже используются разрешенные относительно напряжений физические соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= E_1 [(u)_{,r} + v_{12} u/r + v_{13} (w)'], \\ \sigma_\varphi &= E_2 [v_{21} (u)_{,r} + u/r + v_{23} (w)'], \\ \sigma_z &= E_3 [v_{31} (u)_{,r} + v_{32} u/r + (w)'], \\ \sigma_{rz} &= G_{rz} [(u)' + (w)_{,r}], \end{aligned} \quad (4)$$

в которых

$$\begin{aligned} E_1 &= E_r (1 - v_{\varphi z} v_{z\varphi}) / \Delta, \quad v_{12} = (v_{r\varphi} + v_{rz} v_{z\varphi}) / (1 - v_{\varphi z} v_{z\varphi}), \\ v_{13} &= (v_{rz} + v_{r\varphi} v_{\varphi z}) / (1 - v_{\varphi z} v_{z\varphi}), \\ E_2 &= E_\varphi (1 - v_{zr} v_{rz}) / \Delta, \quad v_{21} = (v_{\varphi r} + v_{\varphi z} v_{zr}) / (1 - v_{zr} v_{rz}), \\ v_{23} &= (v_{\varphi z} + v_{\varphi r} v_{rz}) / (1 - v_{zr} v_{rz}), \\ E_3 &= E_z (1 - v_{r\varphi} v_{\varphi r}) / \Delta, \quad v_{31} = (v_{zr} + v_{z\varphi} v_{\varphi r}) / (1 - v_{r\varphi} v_{\varphi r}), \\ v_{32} &= (v_{z\varphi} + v_{zr} v_{\varphi r}) / (1 - v_{r\varphi} v_{\varphi r}), \\ \Delta &= 1 - v_{r\varphi} v_{\varphi r} - v_{\varphi z} v_{z\varphi} - v_{zr} v_{rz} - v_{r\varphi} v_{\varphi z} v_{zr} - v_{z\varphi} v_{zr} v_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Композиционный материал с произвольной системой армирования является ортотропным телом. Композиционный материал с продольно уложенными волокнами описывается моделью трансверсально-изотропного тела. В этом случае

$$E_r = E_\varphi, \quad v_{r\varphi} = v_{\varphi r}, \quad v_{rz} = v_{zr}, \quad v_{z\varphi} = v_{\varphi z}$$

и

$$E_1 = E_2, \quad v_{12} = v_{21}, \quad v_{13} = v_{23}, \quad v_{31} = v_{32} \quad (6)$$

и имеется пять независимых постоянных ($E_r, E_z, v_{r\varphi}, v_{rz}, G_{rz}$).

Композиционный материал, армированный в кольцевом направлении, также является трансверсально-изотропным материалом. В этом случае

$$E_r = E_z, \quad v_{rz} = v_{zr}, \quad v_{\varphi r} = v_{r\varphi}, \quad v_{\varphi z} = v_{z\varphi}$$

и

$$E_1 = E_3, \quad v_{13} = v_{31}, \quad v_{12} = v_{32}, \quad v_{21} = v_{23}. \quad (7)$$

Для изотропного материала все модули и коэффициенты Пуассона равны между собой, а модуль сдвига $G = E/2(1+\nu)$. Для изотропного тела количество независимых упругих характеристик равняется двум – это модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν .

Из системы уравнений равновесия получается система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L(u) + aw'_{,r} + bw' / r &= 0, \\ M(u) + h(w_{,rr} + w_{,r}/r) + w'' &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

(или $M(u) + Q(w) = 0$),

в которых используются обозначения

$$\begin{aligned} L(u) &= u_{,rr} + u_{,r}/r - \lambda^2 u/r^2 + gu'' = r^{\lambda-1} [(r^{1-2\lambda} (r^\lambda u)_{,r}]_{,r} + gu'', \\ M(u) &= cu'_{,r} + du'/r = cr^{-d/c} (r^{d/c} u')_{,r}, \quad (9) \\ Q(w) &= h(w_{,rr} + w_{,r}/r) + w'' = hr^{-1} (rw_{,r})_{,r} + w'' \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= E_2/E_1, \quad g = G_{rz}/E_1, \quad a = v_{13} + g, \quad b = v_{13} - \lambda^2 v_{23}, \\ h &= G_{rz}/E_3, \quad c = v_{31} + h, \quad d = v_{32} + h. \end{aligned} \quad (10)$$

Характерно, что для цилиндров, материал которых моделируется трансверсально-изотропной средой, соотношения (10) упрощаются. Для композиционных материалов с волокнами, уложенными в продольном (ось z) направлении

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= 1, \quad g = G_{rz}/E_1, \quad a = v_{13} + g, \quad b = 0, \\ h &= G_{rz}/E_3, \quad v_{31} = v_{32} \quad \text{и} \quad c = d = v_{31} + G_{rz}/E_3, \end{aligned} \quad (11)$$

и для композиционных материалов с поперечно уложенными волокнами (кольцевая намотка)

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= E_2/E_1, \quad g = G_{rz}/E_1, \quad a = v_{13} + g, \quad b = v_{13} - \lambda^2 v_{23}, \\ h &= G_{rz}/E_3, \quad v_{31} = v_{32} \quad \text{и} \quad c = d. \end{aligned} \quad (12)$$

Наконец, для цилиндров из изотропных материалов –

$$\begin{aligned} E &= E_1 = E_2 = E_3, \quad \nu = v_{13} = v_{23} = v_{31} = v_{32}, \\ \lambda^2 &= 1, \quad g = h = G_{rz}/E = 1/2(1+\nu), \\ a &= c = d = \nu + g, \quad b = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Равенство параметров $c = d$ для трансверсально-изотропных тел и условие, что параметр $b = 0$ для изотропных тел заметно упрощает способ получения разрешающих уравнений.

Иногда (при соответствующих граничных условиях) более удобными для исследований оказываются уравнения осесимметричной деформации ортотропных цилиндров, полученные относительно осевой w компоненты вектора перемещений.

Для получения разрешающих уравнений относительно осевой w компоненты вектора перемещения используется система уравнений, записанная в форме

$$\begin{aligned} u_{,r} + u_{,r}/r - \lambda^2 u/r^2 + gu'' + R(w) &= 0, \\ cu'_{,r} + du'/r + Q(w) &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

в которой введены обозначения

$$\begin{aligned} R(w) &= aw'_{,r} + bw'/r = ar^{-b/a}(r^{b/a}w')_{,r}, \quad (15) \\ Q(w) &= h(w_{,r} + w_{,r}/r) + w'' = hr^{-1}(rw_{,r})_{,r} + w''. \end{aligned}$$

Для ортотропной среды радиальная компонента u вектора перемещения находится в результате интегрирования второго уравнения системы (14)

$$cu'_{,r} + du'/r = cr^{-d/c}(r^{d/c}u')_{,r} = -Q(w), \quad (16)$$

если предварительно определена осевая w компонента перемещения. Последняя является решением уравнения

$$L_u R(w) - M_u Q(w) = 0, \quad (17)$$

в котором операторы $L_u(\dots)$ и $M_u(\dots)$ даются соотношениями

$$\begin{aligned} L_u(\dots) &= c\partial^3(\dots)/\partial r^2\partial z + (p_1/r)\partial^2(\dots)/\partial r\partial z + (p_2/r^2)\partial(\dots)/\partial z, \\ M_u(\dots) &= \partial^3(\dots)/\partial r^3 + (q_1/r)\partial^2(\dots)/\partial r^2 + \\ &+ (q_2/r^2)\partial(\dots)/\partial r + q_3(\dots)/r^3 + g\partial^3(\dots)/\partial r\partial z^2 + \\ &+ (q_4/r)\partial^2(\dots)/\partial z^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Постоянные коэффициенты $p_i (i=1,2)$, $q_j (j=1,2,3,4)$, входящие в выписанные операторы L_u и M_u , должны быть определены из условия, позволяющего исключить из системы уравнений (8) радиальную u компоненту перемещения, т.е. из условия

$$L_u(u_{,r} + u_{,r}/r - \lambda^2 u/r^2 + gu'') - M_u[cu'_{,r} + du'/r] = 0. \quad (19)$$

Равенства (18) и (19) позволяют получить следующую систему алгебраических уравнений относительно 6 неизвестных параметров p_i, q_j :

$$\begin{aligned} c + p_1 - d - cq_1 &= 0, \\ -2c - c\lambda^2 + p_1 + p_2 + 3d - dq_1 - cq_2 &= 0, \\ 2c + 4c\lambda^2 - p_1 - \lambda^2 p_2 + p_2 - 6d + 2dq_1 - dq_2 - cq_3 &= 0, \\ -6c\lambda^2 + 2\lambda^2 p_1 - \lambda^2 p_2 + 6d - 2dq_1 + dq_2 - dq_3 &= 0, \\ gp_1 - dg - cq_4 = 0, \quad gp_2 + dg - dq_4 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение системы алгебраических уравнений (20) позволяет получить

$$\begin{aligned} p_1 &= c(3 + 2d/c), \quad p_2 = d(2 + d/c), \\ q_1 &= 4 + d/c, \quad q_2 = 1 + 3d/c - \lambda^2, \\ q_3 &= (\lambda^2 - 1)(1 - d/c), \quad q_4 = g(3 + d/c). \end{aligned} \quad (21)$$

Так как форма преобразования (18) установлена, то уравнение (17) может быть записано в окончательной форме – форме дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка

относительно осевой w компоненты вектора перемещений.

$$\begin{aligned} \{h\partial^5/\partial r^5 + (a_0/r)\partial^4/\partial r^4 + (a_1/r^2)\partial^3/\partial r^3 + (a_2/r^3)\partial^2/\partial r^2 + (a_3/r^4)\partial/\partial r + \\ + [b_0\partial^3/\partial r^3 + (b_1/r)\partial^2/\partial r^2 + (b_2/r^2)\partial/\partial r + b_3/r^3]\partial^2/\partial z^2 + \\ + (g\partial/\partial r + q_4/r)\partial^4/\partial z^4\}w = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь введены дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} a_0 &= h(1 + q_1) = h(5 + d/c), \\ a_1 &= h(-3 + q_1 + q_2) = h(2 - \lambda^2 + 4d/c), \\ a_2 &= h(6 - 2q_1 + q_2 + q_3) = -h[2(1 - d/c) + \lambda\lambda^2 d/c], \\ a_3 &= h(-6 + 2q_1 - q_2 + q_3) = h\lambda\lambda^2(2 - d/c), \\ b_0 &= (1 + gh - ac), \\ b_1 &= q_1 + gh(1 + q_4/h) - bc - ap_1 = \\ &= (1 + gh)(4 + d/c) - bc - ac(3 + 2d/c), \quad (23) \\ b_2 &= q_2 + gh(q_4/h - 1) + 2bc - bp_1 - ap_2 = \\ &= 1 + 3d/c - \lambda^2 + (gh - ad)(2 + d/c) - bc(1 + 2d/c), \\ b_3 &= dq_3 - 2bc + b(p_1 - p_2) = (1 - d/c)[\lambda^2 - 1 + bc(1 + d/c)]. \end{aligned}$$

Предпринимались попытки представления уравнения (22) в виде произведения дифференциальных операторов более низкого порядка, например, в виде произведения трех операторов

$$M_1 M_2 M_3(w) = 0, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} M_1(\dots) &= x_0\partial(\dots)/\partial r + x_1(\dots)/r, \\ M_2(\dots) &= y_0\partial^2(\dots)/\partial r^2 + y_1\partial(\dots)/r\partial r + y_2(\dots)/r^2 + y_3\partial^2(\dots)/\partial z^2, \\ M_3(\dots) &= z_0\partial^2(\dots)/\partial r^2 + z_1\partial(\dots)/r\partial r + z_2(\dots)/r^2 + z_3\partial^2(\dots)/\partial z^2 \end{aligned}$$

с десятью пока не определенными коэффициентами $x_0, y_0, y_1, y_2, z_0, z_1, z_2$. Для определения десяти неизвестных коэффициентов получена система из двенадцати уравнений

$$\begin{aligned} x_0 Y_0 &= h, \\ Y_0 &= y_0 z_0, \\ x_0 Y_1 + x_1 Y_0 &= a_0, \\ Y_1 &= y_0 z_1 + y_1 z_0, \\ x_0 Y_2 + (x_1 - x_0) Y_1 &= a_1, \\ Y_2 &= y_0(z_2 - 2z_1) + y_1 z_1 + y_2 z_0, \quad (25a) \\ x_0 Y_3 + (x_1 - 2x_0) Y_2 &= a_2, \\ Y_3 &= y_0(2z_1 - 4z_2) + y_1(z_2 - z_1) + y_2 z_1, \\ x_0 Y_4 + (x_1 - 3x_0) Y_3 &= a_3, \\ Y_4 &= 6y_0 z_2 - 2y_1 z_2 + y_2 z_2, \\ (x_1 - 4x_0) Y_4 &= a_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 Z_0 = b_0, Z_0 = y_3 z_0 + y_0 z_3, x_0 Z_1 + x_1 Z_0 = b_1, \\ Z_1 = y_3 z_1 + y_1 z_3, \quad (25б) \\ x_0 Z_2 + (x_1 - x_0) Z_1 = b_2, Z_2 = y_3 z_2 + y_2 z_3, (x_1 - 2x_0) Z_2 = b_3, \\ x_0 y_3 z_3 = c_0, x_1 y_3 z_3 = c_1, \quad (25с) \end{aligned}$$

полученная путем сравнения соответствующих коэффициентов уравнений (22) и (24). При этом правые части полученных уравнений известны. Они определяются равенствами (23).

Из (25с) следует

$$x_1 = x_0 c_1 / c_0 = x_0 C.$$

Далее, последовательно определяя из (25а), (25б) неизвестные величины Y_i, Z_i , можно получать

$$\begin{aligned} Y_4 = a_4 / (C - 4) x_0, \\ Y_3 = [a_3 - a_4 / (C - 4)] / (C - 3) x_0, \\ Y_2 = \{a_2 - [a_3 - a_4 / (C - 4)] / (C - 3)\} / (C - 2) x_0, \quad (26а) \\ Y_1 = ((a_1 - \{a_2 - [a_3 - a_4 / (C - 4)] / (C - 3)\} / (C - 2))) / (C - 1) x_0, \\ Y_0 = \{\{a_0 - ((a_1 - \{a_2 - [a_3 - a_4 / (C - 4)] / (C - 3)\} / (C - 2))) / (C - 1)\} / C x_0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Z_2 = b_3 / (C - 2) x_0, \\ Z_1 = [b_2 - b_3 / (C - 2)] / (C - 1) x_0, \quad (26б) \\ Z_0 = \{b_1 - [b_2 - b_3 / (C - 2)] / (C - 1)\} C x_0. \end{aligned}$$

Полученные соотношения (26) могут быть использованы для определения искомых коэффициентов, если тождественно выполняются следующие два условия:

$$x_0 Y_0 = h, x_0 Z_0 = b_0,$$

которые являются двумя последними уравнениями системы (25). Эти два условия в общем виде благодаря соотношениям (23) записываются в виде ограничений на характеристики материалов

$$\begin{aligned} (C - 4) \{ \{ (C - 3) \{ (C - 2) [(C - 1) a_0 - a_1] + a_2 \} - a_3 \} \} + a_4 = \\ = (C - 4) (C - 3) (C - 2) (C - 1) C h, \\ (C - 2) [(C - 1) b_1 - b_2] + b_3 = (C - 2) (C - 1) C b_0. \quad (26с) \end{aligned}$$

Если в соотношения (26с) подставить выражения коэффициентов из (23), то после несложных преобразований можно получить

$$(1 - d/c) [(d/c)^2 + d/c - \lambda^2] = 0 \text{ и } \lambda^2 - d/c = 0. \quad (27)$$

Нетрудно видеть, что в соответствии с соотношениями (11) и (13) полученные равенства (27) тождественно выполняются для армированных в осевом направлении композиционных материалов и для цилиндров из изотропных материалов. Для ортотропных материалов соотношения (27) не могут быть выполнены. Поэтому в общем случае система уравнений (25) является переопределенной и несов-

местной. Переопределенная система уравнений (25) не позволяет представить уравнение пятого порядка (23) в виде произведения дифференциальных операторов более низкого порядка с действительными или комплексными коэффициентами при произвольных (независимых) упругих характеристиках ортотропного тела (2). Это обстоятельство привело к тому, что до настоящего времени нет аналитического решения задачи об осесимметричной деформации ортотропных цилиндров.

Проще обстоит дело для цилиндров из изотропных и трансверсально-изотропных материалов (композиционных материалов с направлением армирования вдоль оси цилиндра). В этих случаях параметры b, λ^2, c и d удовлетворяют условиям $b = 0, \lambda^2 = 1, c = d$, для которых коэффициенты a_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), b_i ($i = 0, 1, 2, 3$), c_0, c_1 заданы соотношениями (23). При этом два уравнения (26с) оказываются линейно зависимыми и десять независимых уравнений (26с) оказываются линейно не зависимыми. Десять независимых уравнений (25) в этих случаях позволяют найти десять неизвестных параметров $x_0, x_1, y_0, y_1, y_2, y_3, z_0, z_1, z_2, z_3$. В этих случаях удобно ввести неизвестные $s_i = y_i / y_0$ и $t_i = z_i / z_0$ и для их определения использовать уравнения

$$\begin{aligned} s_3 + t_3 = Z_0 / Y_0 = b_0 / h, \\ s_3 t_3 = c_0 / Y_0 = c_0 / h = g/h, \\ s_1 + t_1 = Y_1 / Y_0 = a_0 - c_1 / c_0 = 1, \\ t_3 s_1 + s_3 t_1 = Z_1 / Y_0 = (b_1 - 4b_0) / h = b_0 / h, \quad (28) \\ s_2 + t_2 = Y_2 / Y_0 + 2t_1 - s_1 t_1 = 2 + 2t_1 - s_1 t_1, \\ t_3 s_2 + t_3 s_2 = Z_2 / Y_0 = b_2 / h - 2(Z_1 / Y_0) = 0. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (28)

$$\begin{aligned} s_3 = 0,5 \{ b_0 / h \pm [(b_0 / h)^2 - 4g/h]^{0,5}, \\ t_3 = 0,5 \{ b_0 / h - (\pm 1) [(b_0 / h)^2 - 4g/h]^{0,5}, \\ s_1 = -t_3 / \Delta, t_1 = s_3 / \Delta, \Delta = s_3 - t_3, \quad (29) \\ s_2 = s_3 [2(1 + s_1) - s_1 t_1] / \Delta, \\ t_2 = -t_3 [2(1 + s_1) - s_1 t_1] / \Delta. \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемых случаях (трансверсально-изотропное и изотропное тела) уравнение (24) принимает вид

$$\begin{aligned} (\partial / \partial r + C/r) (\partial^2 / \partial r^2 + s_1 \partial / r \partial r + s_2 / r^2 + s_3 \partial^2 / \partial z^2) (\partial^2 w / \partial r^2 + \\ + t_1 \partial w / r \partial r + t_2 w / r^2 + t_3 \partial^2 w / \partial z^2) = 0. \end{aligned}$$

Разрешающее уравнение относительно осевой компоненты перемещения w оказалось несколько сложнее, чем уравнение относительно радиальной компоненты u .

Для получения разрешающего интегрального уравнения относительно осевой w компоненты вектора перемещения для ортотропных тел используется уравнение (2), из которого следует, что

$$u = -(r^{-d/c}/c) \int [r^{d/c} Q(w) dr + F_3(z)] dz + \Phi_3(r), \quad (30)$$

$$u' = -(r^{-d/c}/c) \int r^{d/c} Q(w) dr + F_3(z),$$

$$u_{,r} = -(1/c) \int Q(w) dz + (d/c^2) (r^{-d/c-1}) \times \\ \times \int [r^{d/c} Q(w) dr + F_3(z)] dz + \Phi_{3,r}(r).$$

Здесь $F_3(z)$ и $\Phi_3(r)$, произвольные функции интегрирования.

Интегрируя первое уравнение системы (2), можно получить

$$ar^{b/a} w = - \int \{ r^{b/a} [u_{,r} + (1-b/a)r^{-1}u] + (b/a + \lambda\lambda - 1)^2 \times \\ \times \int r^{b/a-2} u dr + F_4(z) \} dz - g \int r^{b/a} u' dr + \Phi_4(r). \quad (31)$$

Здесь $F_4(z)$ и $\Phi_4(r)$ – новые произвольные функции. Если вместо радиальной компоненты перемещения u и ее производных $u_{,r}$ и u' подставить их значения, определенные из (30) через осевую компоненту перемещения w , то можно записать окончательное интегральное уравнение относительно осевой компоненты вектора перемещения.

Приведенные уравнения в виде дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений относительно отдельных компонентов вектора перемещений могут быть использованы в

разработке численно-аналитических методов решения задач напряженно-деформированного состояния ортотропных, трансверсально-изотропных и изотропных цилиндров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Носатенко П.Я. Численное решение трехмерных задач неосесимметричной деформации слоистых анизотропных оболочек вращения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. №2. С. 43-51.
2. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высшая школа, 1975. 526 с.
3. Носатенко П.Я., Ширшов Ю.Ю. Пространственное НДС перекрестно армированных оболочек вращения при нагреве // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 6. С. 965-975.
4. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Новосибирск: Наука, 2001. 287с.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

Резюме

Кернеулік және орын ауыстыру векторларының жеке құраушыларына қатысты жазылған дифференциалдық шешуші теңдеулер алынған. Оларды ортотроптық, трансверсальды-изотроптық және изотроптық цилиндрлердің кернеулік есептерін сандық-аналитикалық әдіспен шешуде пайдалануға болады.

УДК 539.3

Поступила 5.01.06г.