Р. МЫРЗАКУЛОВ

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТАХ В БИОЛОГИИ

1. Введение. Новые достижения нелинейной математики и физики, в частности теории солитонов, позволяют по-новому подходить к исследованию нелинейных процессов в биологии [1–5]. Например, эксперименты показывают, что двойные спирали ДНК в ходе биологических процессов рекомбинации и репликации связываются в узлы и зацепляющиеся петли. Механизм распутывания таких узлов, имеющих место в клетках, поразительно напоминает простейший математический метод порождения новых полиномиальных инвариантов теории узлов. Действительно, исследования последних лет показывают, что узлы в молекулах ДНК довольно успешно описываются математической теорией узлов (см., например, [6]). С другой стороны, теория узлов тесно связана с точно решаемыми спиновыми моделями статистической механики. Основной величиной, описывающей спиновые системы статистической механики, является так называемая статистическая сумма $Z = \sum_S \exp[-E(s)(kT)^{-1}]$, где k есть постоянная Больцмана, суммирование выполняется по всем допустимым состояниям s системы, $E(s)$ и T – энергия и температура соответственно. Оказалось, что Z при подходящей нормировке дает инварианты узлов, например инвариант Джонса. Простейшим классическим непрерывным прототипом спиновых систем статистической механики является следующая модель Гейзенберга (МГ): $S_t = S \wedge S_{xx}$, где

$S=(S_1,S_2,S_3)$, $S^2=1$. Она служит одним из основных уравнений теории солитонов и успешно применяется в теории магнетизма и дифференциальной геометрии. Цель данной работы – определение возможности существования в биологии хорошо известных в физике таких нелинейных структур, как солитоны, узлы, косы, паттерны и пиконы. Также обсуждается связь некоторых нелинейных моделей биологии с классическими непрерывными спиновыми моделями. Последние могут быть рассмотрены как некоторые обобщенные МГ.

2. Узлы. Простейшими биологическими моделями являются нелинейные модели в (0+1)-размерности. В качестве примера рассмотрим следующую модель:

$$u_t=-\frac{auw}{\sqrt{u^2+v^2}}-bv+f_1,$$

$$v_t=-\frac{avw}{\sqrt{u^2+v^2}}+bu+f_2,$$

$$w_t=-a(c-\sqrt{u^2+v^2})+f_3. \qquad (1)$$

Система (1) описывает нелинейную динамику взаимодействия трех биологических элементов. Она содержит ряд частных случаев, имеющих богатую динамическую природу, такую, как системы Лоренца, Ресслера и т.д. Далее для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда $f_i=0$. В этом случае система (1) может быть переписана в гамильтоновой форме:

$$u_{tt}=-\frac{\partial H}{\partial u}=\frac{a}{\sqrt{u^2+v^2}}[2bvw+au(c-\sqrt{u^2+v^2})]-b^2u, \qquad (2а)$$

$$v_{tt}=-\frac{\partial H}{\partial v}=-\frac{a}{\sqrt{u^2+v^2}}[2buw-av(c-\sqrt{u^2+v^2})]-b^2v, \qquad (2б)$$

$$w_{tt}=-\frac{\partial H}{\partial w}=-a^2w, \qquad (2в)$$

где H есть соответствующая функция Гамильтона. Из системы (1) получаем

$$(u^2+v^2+w^2)_t=-2acw. \qquad (3)$$

Отсюда с учетом выражения

$$(\sqrt{u^2+v^2})_t=-2aw \qquad (4)$$

имеем

$$(u^2+v^2+w^2-c\sqrt{u^2+v^2})_t=0. \qquad (5)$$

В результате получаем уравнение тора

$$(\sqrt{u^2+v^2}-\frac{c}{2})^2+w^2=I_1+\frac{c^2}{4}. \qquad (6)$$

Мы видим, что траектория в трехмерном фазовом пространстве (u,v,w) ограничена поверхностью, определяемой уравнением (6), т.е. тором. Вычислим дивергенцию системы. Из (1) имеем

$$div\dot{R}=\frac{\partial\dot{u}}{\partial u}+\frac{\partial\dot{v}}{\partial v}+\frac{\partial\dot{w}}{\partial w}=-\frac{aw}{\sqrt{u^2+v^2}} \qquad (7)$$

или в виде уравнения непрерывности

$$div\dot{R}=(\ln\sqrt{u^2+v^2})_t. \qquad (8)$$

Отметим, что уравнение (1) является частным случаем следующего векторного уравнения:

$$R_t=\alpha R_x\wedge R_{xx}+\beta H+F, \qquad (9)$$

где

$$R=(u,\,v,\,w),$$

$$H=(-\frac{auw}{\sqrt{u^2+v^2}}-bv,\quad -\frac{avw}{\sqrt{u^2+v^2}}+bu,$$

$$-a(c-\sqrt{u^2+v^2})),\quad F=(f_j). \qquad (10)$$

Отсюда при $\alpha=0$, $\beta=1$ получается система (1). Связанные нелинейные уравнения (2) допускают интересный класс решений. Например, можно показать, что (2) имеет следующие решения: $u=(c+d\cos at)\cos bt$, $v=(c+d\cos at)\sin bt$, $w=d\sin at$. Эти решения связаны с трилистником, который является простейшим нетривиальным узлом.

3. Паттерны. Важнейшим видом нелинейных явлений являются паттерны. Они имеются в изобилии в природе. Если посмотреть вокруг нас, то мы увидим мириады интересных паттернов от простейших и однообразных до сложных типов. Они встречаются в разнообразных явлениях в физике, химии, биологии, социальной динамике, экономике и т.д. Существенно, что они имеют различные структуры в пространственно-временном масштабе. Паттерны возникают как коллективные и кооперативные явления благодаря большому числу составных подсистем. Последнее, в свою очередь, может быть совокупностью частиц, атомов, молекул, цепей, клеток, ячеек, бактерий, дефектов, дислокаций и т.д. Когда эти составные части движутся или взаимодействуют, они приводят к возникновению различных паттернов. Паттерны бывают как простыми, так и сложными. Когда взаимодействия между составляющими являются нелинейными, естественно ожидать новые и неожиданные по форме паттерны. Паттерны могут быть стационарными или изменяться со временем. Они могут стремиться к какой-то цели или мишени асимптотически. Однородные или единообразные паттерны, хотя тривиальные, но являются важными базисными структурами. Часто встречаются паттерны бегущих волн, особенно в дисперсионных системах. Различные солитонные волны представляют собой новые типы пространственно-временных паттернов, всегда сохраняющих идентичность. Их возбуждения могут также привести к дальнейшим интересным структурам. Новые структуры, которые, естественно, имитируют встречающие паттерны, возникают при рассмотрении нелинейных диффузионных и диссипативных систем. Это проявляется особенно при исследовании так называемых реакционно-диффузионных систем. Исследование их – более интригирующая и трудная задача. Когда большая совокупность микроструктур, содержащих частицы, атомы, молекулы, дефекты, дислокации и т. д., способна двигаться и/или взаимодействовать, эволюция концентрации различных видов удовлетворяет нелинейным диффузионным уравнениям реакционного типа. Они могут быть выведены из уравнения баланса масс, энергии, момента и т.д. Примером таких уравнений является следующая система реакционно-диффузионных уравнений:

$$X_t = D_X \nabla^2 X + F(X,Y),$$

$$Y_t = D_Y \nabla^2 Y + G(X,Y), \qquad (11)$$

где F, G – нелинейные взаимодействующие члены; D_X и D_Y – соответствующие диффузионные коэффициенты. Известное уравнение Фишера

$$X_t = D_X \nabla^2 X + aX(1-\delta X), \qquad (12)$$

является частным случаем системы (3). В 1+1 размерности это уравнение Фишера примет вид

$$X_t = X_{yy} + X(1-X), \qquad (13)$$

где мы полагали $D_X = a = \delta = 1$. Это уравнение имеет интересное солитонного типа решение следующего вида:

$$X = 1 - \left[1 + 6^{-\frac{1}{2}} k \exp\left((y - 6^{-\frac{1}{2}} 5t) 6^{-\frac{1}{2}} \right) \right]^{-2}. \qquad (14)$$

Заметим, что существуют различные обобщения уравнения Фишера, в том числе интегрируемые. Здесь приведем спиновую систему, эквивалентную уравнению Фишера (5). Можно показать, что она имеет вид

$$S_{1t} = S_{1yy} + \left(arctg \frac{S_1}{S_2}\right)_y S_{2y} + S_2\left[arctg \frac{S_1}{S_2} - \left(arctg \frac{S_1}{S_2}\right)^2\right], \qquad (15)$$

где $arctg(S_1 S_2^{-1}) = X$. Это уравнение также обладает точными решениями солитонного типа.

4. Пиконы. Рассмотрим новый тип нелинейных биологических эффектов – пиконы. Рассмотрим обобщенную модель Фишера следующего вида:

$$X_t = aX_{yy} + bX(1-cX) + F(X). \qquad (16)$$

Это уравнение имеет солитонное решение $X = de^{-|y-dt|}$. Такие решения называются пиконами. Аналогично можно построить N-пиконные решения: $X = \sum_{j=1}^{N} d_j(t) e^{-|y-e_j(t)|}$. Заметим, что пиконными решениями обладают и спиновые системы. В этом случае пиконные решения могут иметь форму $S_3(y,t) = de^{-|y-dt|}$ или $S^+(y,t) = de^{-|y-dt|+i\varphi(y,t)}$.

5. Косы. Рассмотрим еще один тип нелинейных биологических образований – так называемые косы. Вместо трех реальных функций u, v, w рассмотрим одну комплексную функцию ω. В биологии и физике часто встречается случай, когда функция ω удовлетворяет уравнению $(\nabla\omega)^2 = u\omega^2$, где ∇ является градиентом, $u(x,y,z,\omega,\overline{\omega})$ – потенциальной функцией. Для построения решений типа косы перепишем это уравнение в терминах цилиндрических координат (ρ,ϕ,z). Имеем $\omega_\rho^2 + \rho^{-2}\omega_\phi^2 + \omega_z^2 = u\omega^2$. В частном случае $u = 0$ интересующее нас решение этого уравнения, описывающее косы, имеет вид [7] $\omega = C\rho^{\pm n}(n + \sqrt{k^2\rho^2 + n^2})^{\mu n} e^{\pm\sqrt{k^2\rho^2+n^2} \pm i(n\phi+kz)}$. Напомним, что такие решения типа косы называют также топологическими струнными решениями.

6. Заключение. Известно, что солитоны, паттерны, пиконы, узлы и косы эффективно используются при исследовании нелинейных процессов в различных областях физики. В данной работе нами показано, что они могут применяться также и при описании нелинейных эффектов в биологии. Это открывает новый этап в изучении нелинейных моделей биологии и в теоретическом описании экспериментально наблюдаемых нелинейных биологических структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мырзакулов Р.* Биология с точки зрения физика и математика // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. 2005. №3. С. 51-58.

2. *Myrzakulov R.* Solitons in biophysics. Вестник КазНУ // Серия физическая. 2005. №1. С. 23-26.

3. *Мырзакулов Р.* О некоторых проблемах нелинейной биологии. Тезисы докладов 4-й междун. научной конференции «Современные достижения физики и фундаментальное физическое образование». Алматы, 2005. С. 111.

4. *Мырзакул Ш.Р.* О нелинейных моделях человеческого мозга // Мат-лы 59-й науч. конф. молодых ученых КазНУ. Алматы, 2005. С. 17.

5. *Кожамкулов Т.А., Мырзакул Ш.Р., Мырзакулов Р.* Солитоны как носители информации в нелинейных моделях человеческого мозга // Тезисы докладов 4-й междун. научной конференции «Современные достижения физики и фундаментальное физическое образование». Алматы, 2005. С. 107.

6. *Sumners D.W.* // Proc. Nath. Acad. Sci. USA. 2005. V. 102. P. 9165-9169.

7. *Wereszczynski A.* // Mod. Phys. Lett. 2005. V. A20. P. 1135-1146.

Резюме

Биологиядағы кейбір сызықтық емес құбылыстар: солитондар, хаостар және паттерндер қарастырылған. Жалпыламалы Фишер теңдеуінің дәл солитондық шешімдері табылған. 1+1 өлшемдегі Фишер теңдеуімен байланысқан спиндік жүйе құрылған.

Summary

Some nonlinear processes in biology: chaos, solitons and patterns are considered. Exact soliton solutions of the generalized Fisher equation are found. The spin systems which is equivalent to the (1+1)-dimensional Fisher equation is constructed.

УДК 530.1

Физико-технический институт,
г. Алматы

Поступила 10.02.06г.