А. М. САРСЕНБИ

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ БАЗИСНОСТИ РИССА КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Установлены необходимые и достаточные условия базисности Рисса несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка.

1. Введение. Для полноты изложения напомним ряд известных определений и результатов. Две системы функций $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ из L_2 называются биортогонально сопряженными на некотором отрезке $[a, b]$, если

$$\left(u_i, \upsilon_k\right) = \int_a^b u_i \overline{\upsilon}_k dx = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Систему функций $\{u_k(x)\}$ называют минимальной, если ни одна из функций этой системы не входит в линейную оболочку остальных функций той же системы.

Если система $\{u_k(x)\}$ минимальна, то для нее существует биортогонально сопряженная система $\{\upsilon_k(x)\}$. Если к тому же система $\{u_k(x)\}$ полна, то биортогонально сопряженная система определяется однозначно.

Произвольная функция $f(x) \in L_2$ имеет два биортогональных разложения:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x), \text{ где } c_n = (f, \upsilon_n);$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} d_n \upsilon_n(x), \text{ где } d_n = (f, u_n).$$

Систему $\{u_k(x)\}$ называют базисом в L_2, если для любой функции $f(x) \in L_2$ существует единственный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$, сходящийся к $f(x)$ в смысле нормы в L_2.

Если одна из биортогонально сопряженных систем–базис, то другая тоже. Всякая полная ортогональная система есть базис.

Пусть системы $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ являются биортогонально сопряженными и полны в L_2.

Система $\{u_k(x)\}$ называется бесселевой, если для любой функции $f(x) \in L_2$ имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \upsilon_k)^2 < \infty .$$

Систему $\{u_k(x)\}$ называют гильбертовой, если для любой последовательности чисел c_k, таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} | c_k |^2 < \infty$, найдется одна единственная функция $f(x) \in L_2$, для которой $(f, \upsilon_k) \equiv c_k$.

Полная и минимальная система $\{u_k(x)\}$ называется базисом Рисса, если она является бесселевой и гильбертовой одновременно.

Приведенные определения и утверждения можно найти в работе Н. К. Бари [1] (см. также [2, 3]).

Существуют примеры полных и минимальных систем, не являющихся базисами, а также имеются базисы, не являющиеся базисами Рисса (см. [1] и ссылки в ней).

2. Определение корневых функций. На произвольном интервале G числовой оси рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu = -u'' + q(x)\, u \qquad (1)$$

с комплекснозначным потенциалом $q(x) \in L_1(G)$.

Обычно выражение (1) называют дифференциальным, а дифференциальный оператор порождается выражением (1) и некоторыми конкретными краевыми условиями. Поскольку для наших рассмотрений конкретный вид краевых условий не играет особой роли, то выражение (1) будем называть формально несамосопряженным дифференциальным оператором и введем понятие обобщенных корневых функций (ОКФ) этого оператора (см. [4, 5]).

Системой ОКФ оператора L мы назовем произвольную систему комплекснозначных функций $\{u_k(x)\}$, $k = 1,2,\ldots$, каждая из которых абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной в интервале G и для некоторого комплексного числа λ_k почти всюду в G удовлетворяет уравнению

$$Lu_k = \lambda_k u_k - \theta_k u_{k-1}, \qquad (2)$$

где число $\theta_k = 0$ либо $\theta_k = 1$ (в этом случае $\lambda_k = \lambda_{k-1}$), $\theta_1 = 0$.

При $\theta_k = 0$ функцию $u_k(x)$ называем обобщенной собственной функцией, а при $\theta_k = 1$ – обобщенной присоединенной функцией.

Формально сопряженный оператор к оператору L обозначим следующим образом:

$$L^* \upsilon = -\upsilon'' + \overline{q}(x)\, \upsilon . \qquad (3)$$

Системы корневых векторов $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ операторов L и L^* соответственно являются биортогонально сопряженными.

Будем считать, что система ОКФ $\{u_k(x)\}$ пронумерована так, что вслед за каждой обобщенной собственной функцией стоят все входящие вместе с ней в одну цепочку присоединенные функции. Тогда система ОКФ оператора (3) почти всюду в G удовлетворяет уравнению

$$L^* \upsilon_k = \overline{\lambda}_k \upsilon_k - \theta_{k+1} \upsilon_{k+1}, \qquad (4)$$

где числа λ_k, θ_k те же, что и в уравнении (2).

Отметим, что для данного собственного значения биортогональные пары образуют собственная функция оператора L с последней присоединенной функцией оператора L^* и собственная функция оператора L^* с последней присоединенной функцией оператора L.

Если рассмотреть несамосопряженную краевую задачу

$$-u'' = \lambda u, \ 0 < x < 10,$$
$$u(0) = 0, \ \ u'(0) = u'(1), \qquad (5)$$

изученную в работе [6], то нетрудно убедиться в том, что $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{2k-1} = \lambda_{2k} = (2\pi k)^2$, $(k = 1,2,\ldots)$ и

$$u_0(x) = x, \ u_{2k-1}(x) = \sin 2\pi kx ,$$

$$u_{2k}(x) = -x(4\pi k)^{-1} \cos 2\pi kx , \ (k = 1,2,\ldots) . \qquad (6)$$

Здесь каждому собственному значению, кроме $\lambda_0 = 0$, соответствуют одна собственная функция u_{2k-1} и одна присоединенная функция u_{2k}.

Задача сопряженная к задаче (5) имеет вид

$$-\upsilon'' = \overline{\lambda} \upsilon , \quad 0 < x < 1,$$
$$\upsilon'(1) = 0 , \quad \upsilon(0) = \upsilon(1) . \qquad (7)$$

Решая задачу (7), можно установить, что

$$\overline{\lambda}_{2k-1}=\lambda_{2k-1}=\overline{\lambda}_{2k}=\lambda_{2k}(2\pi k)^2 \quad (k=1,2,\dots)$$

и

$$\upsilon_0=2,\ \upsilon_{2k}=-16\cos(2\pi kx),$$

$$\upsilon_{2k-1}(x)=4(1-x)\sin 2\pi kx,\ (k=1,2,\dots), \qquad (8)$$

где υ_0,υ_{2k} – собственные функции, υ_{2k-1} – присоединенные функции.

Системы (6) и (8) являются биортогонально сопряженными. Здесь биортогональную пару составляют собственные функции u_0 и υ_0 (так как присоединенных функций, соответствующих им, нет), собственные функции u_{2k-1} с присоединенными функциями υ_{2k-1}, присоединенные функции u_{2k} с собственными функциями υ_{2k}, т.е.

$$(u_0,\upsilon_0)=\int_0^1 2x\,dx=1,$$

$$(u_{2k-1},\upsilon_{2k-1})=\int_0^1 \sin 2\pi kx\cdot 4(1-x)\sin 2\pi kx\,dx=1,$$

$$(u_{2k},\upsilon_{2k})=\int_0^1 x(4\pi k)^{-1}\cos 2\pi kx\cdot 16\cos 2\pi kx\,dx=1.$$

Как видим, при единой нумерации корневых функций $\{u_k\}$ в системе $\{\upsilon_k\}$ присоединенные функции стоят впереди собственных функций. Теперь становится ясным порядок нумераций в уравнении (4).

3. Критерий базисности Рисса. Прежде всего приведем критерий базисности Рисса корневых функций оператора L, порожденного выражением (1), установленный В. А. Ильиным [4, 5].

Теорема (В. А. Ильин). Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная полная и минимальная в $L_2(G)$ система ОКФ оператора L, у которой длины всех цепочек присоединенных функций равномерно ограничены, а биортогонально сопряженная ей система $\{\upsilon_k(x)\}$ состоит из ОКФ оператора L^*. Тогда, для того чтобы каждая из систем $\left\{u_k(x)/\|u_k\|_{L_2(G)}\right\}$ $\left\{\upsilon_k(x)/\|\upsilon_k\|_{L_2(G)}\right\}$ являлась базисом Рисса в $L_2(G)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие три неравенства:

$$\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_k}\right|\le c_1, \qquad (9)$$

$$\sum_{t\le\left|\sqrt{\lambda_k}\right|\le t+1} 1\le c_2, \qquad (10)$$

$$\|u_k\|_{L_2(G)}\cdot\|\upsilon_k\|_{L_2(G)}\le c_3. \qquad (11)$$

Условие (11) называют условием базисности В. А. Ильина.

Заметим, что достаточность всех трех условий доказана В. А. Ильиным. Необходимость условия (9) доказана Н. Б. Керимовым [7], а необходимость условия (10) доказана В. А. Ильиным [8], необходимость условия (11) для произвольных базисов, вообще говоря, не связанных с дифференциальным оператором, доказана в [3, с. 372]. Попытки найти другие условия базисности привели к следующему результату.

Теорема. Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная полная и минимальная в $L_2(G)$ система ОКФ оператора L и длины цепочек присоединенных функций равномерно ограничены, а биортогонально сопряженная ей система $\{\upsilon_k(x)\}$ состоит из ОКФ оператора L^*. Тогда, для того чтобы каждая из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ являлась базисом Рисса в $L_2(G)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства (9), (10) и условие

$$c_4\le\|u_k\|_{L_S}\le c_5,\quad c_6\le\|\upsilon_k\|_{L_S}\le c_7,\quad (s\ge 2). \qquad (12)$$

В отличие от условия В. А. Ильина (6) в нашей теореме условие базисности сформулировано в терминах норм класса $L_S(G)$, $s\ge 2$.

Перейдем к доказательству этой теоремы. В дальнейшем нам потребуются оценки корневых функций оператора L, полученные В. В. Тихомировым в работе [9], которые при выполнении условий теоремы, имеют вид

$$c'\cdot\|u_k\|_{L_2(G)}\le\|u_k\|_{L_S(G)}\le c''\cdot\|u_k\|_{L_2(G)}, \qquad (13)$$

где $s\ge 2$.

Если система $\{u_k\}$ – базис Рисса, то из почти нормированности базиса Рисса и из неравенств (13) вытекает первое неравенство в (12). Поскольку системы $\{u_k\}$ и $\{\upsilon_k\}$ подчинены одинаковым условиям, то для $\{\upsilon_k\}$ имеют место неравенства (13) и мы убеждаемся в справедливости условия (12).

Если же выполнены условия (9), (10) и (12), то из (12) и (13) вытекает справедливость условия (11). Таким образом, выполняются условия (9), (10) и (11). Тогда по теореме В. А. Ильина каждая из систем $\{u_k\}$ и $\{\upsilon_k\}$ образует безусловный базис. Но выполнение неравенств (12) и (13) обеспечивают почти нормированность в $L_2(G)$ каждой из систем $\{\upsilon_k\}$ и $\{\upsilon_k\}$. Окончательно мы получили, что каждая из систем $\{u_k\}$ и $\{\upsilon_k\}$ является безусловным почти нормированным в $L_2(G)$ базисом. Такой базис есть базис Рисса. Теорема 1 доказана.

Автор выражает признательность М. А. Садыбекову за полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бари Н.К.* // Ученые записки. М.: МГУ, 1951. Т. 4, вып. 142. С. 69-106.
2. *Качмаж С.Г., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М., 1958.
3. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
4. *Ильин В.А.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, №5. С. 789-793.
5. *Ильин В.А.* // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, №9. С. 1516-1529.
6. *Ионкин Н.И.* // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, №2. С. 294-304.
7. *Керимов Н.Б.* // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, №6. С. 943-953.
8. *Ильин В.А.* // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, №12. С. 2059-2071.
9. *Тихомиров В.В.* // ДАН СССР. 1983. Т. 274, №4. С. 807-810.

Резюме

Өз-өзіне түйіндес емес екінші ретті дифференциалдық операторлардың түпкілікті векторларының Рисс базисі болуы үшін қажетті және жеткілікті болатын шарттар келтірілген.

Summary

Necessary and sufficiently conditions of Riss basis of roots functions in norm terms for other spaces7

УДК 517.927.25

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент

Поступила 2.02.06г.