А. Н. ТЮРЕХОДЖАЕВ, А. Г. ИБРАЕВ

ДВИЖЕНИЕ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО СОСТАВА ПО ДОСТАТОЧНО ДЛИННОМУ РЕЛЬСУ, ЛЕЖАЩЕМУ НА ДИСКРЕТНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Бегущие сосредоточенные нагрузки, моделирующие движение колес железнодорожного состава сухим трением на контакте «колесо-рельс», рассматриваются как локализованные продольные силы, направленные по рельсу. Взаимодействие колес шестиосного вагона подвижного состава с рельсами определяется следующей динамической нагрузкой [1]:

$$P(x,t)=\frac{\tau_k}{EF}\sum_{k=0}^{n}\Big\{\delta\left[v_0t-x-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+\delta\left[v_0t-x-l_1-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+$$
$$+\delta\left[v_0t-x-2l_1-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+\delta\left[v_0t-x-2l_1-l_2-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+$$
$$+\delta\left[v_0t-x-3l_1-l_2-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+\delta\left[v_0t-x-4l_1-l_2-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]\Big\}, \qquad (1)$$

где τ_k – величина, связанная с контактным сухим трением качения; l_1, l_2, l_3 – расстояние между колесами; E – модуль упругости; F – площадь поперечного сечения рельса; n – количество вагонов; $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

Волновое уравнение продольного колебания при взаимодействии колес железнодорожного состава с шестиосными вагонами и рельсом, лежащим на шпалах, запишется в виде [2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha\sum_{i=1}^{m}u(t,x_i)\delta\left(t-\frac{x_i}{a}\right)=\frac{\tau_k}{EF}\sum_{k=0}^{n}\left\{\delta\left[v_0t-x-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]\right.+$$
$$+\delta\left[v_0t-x-l_1-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+\delta\left[v_0t-x-2l_1-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+\delta\left[v_0t-x-2l_1-l_2-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+$$
$$\left.+\delta\left[v_0t-x-3l_1-l_2-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]+\delta\left[v_0t-x-4l_1-l_2-k\left(4l_1+l_2+l_3\right)\right]\right\}, \qquad (2)$$

где $u(x,t)$ – смещение сечения рельса x в момент времени t; α – коэффициент жесткости, принимаемый одинаковым для всех шпал; x_i – координата i-й шпалы; m – общее количество шпал; a – скорость упругой волны; v_0 – скорость движения состава.

В начальный момент времени будем считать систему ненапряженной и недеформированной:

$$t=0;\ \ u(0,x)=0;\ \ \frac{\partial u(0,x)}{\partial x}=0. \qquad (3)$$

Граничное условие представляется в виде

$$x=0,\ \ \sigma(t,0)=E\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=-\sigma_0\delta(t)-\sigma_0\sum_{k=1}^{n}\left\{\delta\left[t-\frac{k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]\right.+$$
$$+\delta\left[t-\frac{l_1+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]+\delta\left[t-\frac{2l_1+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]+\delta\left[t-\frac{2l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]+$$
$$\left.+\delta\left[t-\frac{3l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]+\delta\left[t-\frac{4l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]\right\}. \qquad (4)$$

Использование интегрального преобразования Лапласа–Карсона, позволяет задачу (2)–(4) записать в изображениях

$$\frac{d^2\bar{u}(p,x)}{dx^2}-\frac{p^2}{a^2}\bar{u}(p,x)=-\frac{\alpha\cdot p}{a}\sum_{i=1}^{m}\bar{u}(p,x_i)e^{-p\frac{x_i}{a}}-\frac{\tau_k}{EF}\sum_{k=0}^{n}\frac{p}{v_0}\left[e^{-p\frac{x+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{x+2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right]; \tag{5}$$

$$t=0;\quad \bar{u}(0,p)=0;\quad \frac{d\bar{u}(p,x)}{dx}=0; \tag{6}$$

$$x=0;\quad \frac{\partial\bar{u}(p,0)}{\partial x}=-\frac{\sigma_0}{E}\cdot p-\frac{\sigma_0}{E}\times \tag{7}$$

$$\times p\sum_{k=1}^{n}\left[e^{-p\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right],$$

где черточка над функцией означает изображение функции $u(x,t)$.

Метод неопределенных коэффициентов Лагранжа позволяет получить общее решение уравнения (5)

$$\bar{u}(p,x)=c_1e^{-\frac{x}{a}p}+c_2e^{\frac{x}{a}p}-\frac{\tau_k a^2 v_0}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p}\left[e^{-p\frac{x+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{x+2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{x+4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right]+\alpha\cdot a\sum_{i=1}^{m}\bar{u}(p,x_i)\frac{1}{p}e^{-\frac{p}{a}x_i}. \tag{8}$$

Использование граничных условий задачи дает:

$$\bar{u}(p,x)=\alpha\cdot a\sum_{i=1}^{m}\bar{u}(p,x_i)\frac{1}{p}e^{-\frac{p}{a}x_i}+\frac{\tau_k a^3}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p}\left(e^{-\frac{x}{a}p}-\frac{v_0}{a}e^{-\frac{x}{v_0}p}\right)\left[e^{-p\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right]+$$

$$+\frac{\sigma_0 a}{E}\left\{e^{-\frac{x}{a}p}+\sum_{k=1}^{n}\left[e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}\right]\right\}. \tag{9}$$

Введем обозначение

$$f(p,x)=\frac{\tau_k a^3}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p}\left(e^{-\frac{x}{a}p}-\frac{v_0}{a}e^{-\frac{x}{v_0}p}\right)\left[e^{-p\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+\right.$$

$$\left.+e^{-p\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\right]+$$

$$+\frac{\sigma_0 a}{E}\left\{e^{-\frac{x}{a}p}+\sum_{k=1}^{n}\left[e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{x}{a}+\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)}\right]\right\}. \qquad (10)$$

Оригинал $\Phi(t,x)$ функции $f(p,x)$ будет иметь вид:

$$\Phi(t,x)=\frac{\tau_k a^3}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(t-\frac{x}{a}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+\right.$$

$$+\left(t-\frac{x}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$\left.+\left(t-\frac{x}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)\right\}-$$

$$+\frac{\tau_k a^2 v_0}{EF\left(a^2-v_0^2\right)}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+\right.$$

$$+\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{3l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{3l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{4l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)H\left(t-\frac{x}{v_0}-\frac{4l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)\Bigg]\Bigg\}+$$

$$+\frac{\sigma_0\cdot a}{E}\Bigg\{H\left(t-\frac{x}{a}\right)+\sum_{k=1}^{n}\Bigg[H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)+H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{l_1+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2l_1+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)+H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)+$$

$$+H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{3l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)+H\left(t-\frac{x}{a}-\frac{4l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)\Bigg]\Bigg\}. \qquad (11)$$

Решение в изображениях (9) представим в компактном виде:

$$\bar{u}(p,x)=f(p,x)+\alpha\cdot a\sum_{i=1}^{m}\bar{u}(p,x_i)\frac{1}{p}e^{-\frac{p}{a}x_i}. \qquad (12)$$

Определим функцию $\bar{u}(p,x_i)$, $i=\overline{1,m}$, связанную с упругим откликом первой (i = 1) шпал

$$\bar{u}(p,x_1)=\frac{1}{1-\dfrac{\alpha\cdot a}{p}\cdot e^{-\frac{x_1}{a}p}}f(p,x_1).$$

Разлагая это выражение по бегущим волнам, имеем

$$\bar{u}(p,x_1)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha\cdot a}{p}\right)^{j}e^{-\frac{jx_1}{a}p}\cdot f(p,x_1). \qquad (13)$$

Этот ряд, как известно, из [3] является сходящимся.

Для нахождения оригинала при любом i введем обозначения в виде:

$$f_i\left(t,x_i\right)=\frac{\tau_k}{EF}\cdot\frac{a^3}{a^2-v_0^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^j}{p^{j+1}}\left(e^{-\frac{(j+1)x_i}{a}}-\frac{v_0}{a}e^{-\frac{(j+1)x_i}{v_0}}\right)\times\Bigg[e^{-p\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+$$

$$+e^{-p\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}+e^{-p\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}}\Bigg]+\frac{\sigma_0 a}{E}\Bigg\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^j}{p^{j+1}}e^{-\frac{(j+1)x}{a}p}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^j}{p^{j+1}}\times$$

$$\times\Bigg[e^{-p\left(\frac{(j+1)x_i}{a}+\frac{k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{(j+1)x_i}{a}+\frac{l_1+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{(j+1)x_i}{a}+\frac{2l_1+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)}+$$

$$+e^{-p\left(\frac{(j+1)x_i}{a}+\frac{2l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{(j+1)x_i}{a}+\frac{3l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)}+e^{-p\left(\frac{(j+1)x_i}{a}+\frac{4l_1+l_2+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right)}\Bigg]\Bigg\}. \qquad (14)$$

Оригинал (14) имеет выражение

$$F\left(t,x_i\right)=\frac{\tau_k}{EF}\cdot\frac{a^3}{a^2-v_0^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha a\right)^j}{p^{j+1}}\left\{\left[t-\frac{\left(j+1\right)x_i}{a}-\frac{k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{\left(j+1\right)x_i}{a}-\frac{k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]+\right.$$

$$+\left[t-\frac{\left(j+1\right)x_i}{a}-\frac{l_1+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{\left(j+1\right)x_i}{a}-\frac{l_1+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]+\left[t-\frac{\left(j+1\right)x_i}{a}-\frac{2l_1+k\left(4l_1+l_2+l_3\right)}{v_0}\right]^{j+1}\times$$

$$\times H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}\times$$

$$\times H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}\times$$

$$\times H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}\times$$

$$\times H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}\times$$

$$\left.\times H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]\right\}-\frac{\tau_k}{EF}\cdot\frac{a^2v_0}{a^2-v_0^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^j}{(j+1)!}\times$$

$$\times\left\{\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+\right.$$

$$+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+$$

$$+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+$$

$$+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{2l_1+l_2k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+$$

$$+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+$$

$$\left.+\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]^{j+1}H\left[t-\frac{(j+1)x_i}{v_0}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]\right\}+$$

$$+\frac{\sigma_0 a}{E}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^j}{(j+1)!}\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}\right)^{j+1}H\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}\right)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^j}{p^{j+1}}\times\right.$$

$$\times\left[\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)^{j+1}H\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+\right.$$

$$+\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)^{j+1}H\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)^{j+1}H\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+l_2k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)^{j+1}H\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{2l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)^{j+1}H\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{3l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)+$$

$$+\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)^{j+1}H\left(t-\frac{(j+1)x_i}{a}-\frac{4l_1+l_2+k(4l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right)\Bigg]\Bigg]\Bigg\}. \tag{15}$$

Запишем решение в оригиналах для нескольких выражений $u(t,x_1)$, $u(t,x_2)$, $u(t,x_3)$:

$$u(t,x_1)=F(t,x_1), \tag{16}$$

$$u(t,x_2)=F(t,x_2)+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^{j+1}}{(j+1)!}F(t,x_1,(j+1)x_2), \tag{17}$$

$$u(t,x_3)=F(t,x_3)+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^{j+1}}{(j+1)!}\left[F(t,x_1,x_1+jx_3)+F(t,x_2,x_2+jx_3)\right]+$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{(\alpha a)^{j+1}}{(j+1)!}\right]^2F(t,x_1,x_1+x_2+j(x_2+x_3)). \tag{18}$$

Методом математической индукции [3] удается записать $u(t,x_i)$ для общего случая

$$u(t,x_i)=F(t,x_k)+\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha a)^{j+1}}{(j+1)!}F(t,x_1,x_2+jx_i)+\sum_{i=2}^{k-2}\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{(\alpha a)^{j+1}}{(j+1)!}\right]F\left(t,x_{g-1},(j+1)x_{ig}^{i-2}\right)+$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{(\alpha a)^{j+1}}{(j+1)!}\right]^{k-1}F\left(t,x_1,\sum_{g=1}^{i-1}(j+1)x_i\right), \tag{19}$$

где x_i^{k-2} – сумма сочетаний i элементов из множества элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}$.

Таким образом, решение поставленной задачи в окончательном виде имеет выражение:

$$u(t,x)=\Phi(t,x)+\sum_{i=1}^{m}u(t,x_i), \tag{20}$$

где $\Phi(t,x)$ и $u(t,x_i)$ определяются формулами (11), (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тюреходжаев А.Н., Ибраев А.Г.* К динамике движения железнодорожного состава: Мат-лы 10-й Межвузовской конференции по математике и механике. Т. 2. Алматы, 2005. С. 260-265.

2. *Nikitin L.V., Tyurehodgaev A.N.* Defor d'un pipeline souterrain sous l'action de l'onde sismique. Deformation of the Underground Pipeline under Action of Seismic Wave. XII[th] European Conference of Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. 7-10 June 1999. Amsterdam, the Netherlands.

3. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.

Резюме

Тұрақты жылдамдықпен қозғалып келе жатқан алты осьті вагондардан тұратын теміржол құрамасының шпалда жатқан жеткілікті дәрежедегі ұзын рельстің әсерінен туындаған бойлық тербелісін толқынды теория жүзінде қарастырып, аналитикалық шешімі алынған.

Summary

From the position of the wave theory we consider longitudinal vibration of sufficiently long rail which lies on ties under force of wheels which move at a v_0 speed. Analytical description of the process is found by using of Laplace–Carson integral conversion.

Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева,
г. Алматы

Поступила 3.03.06г.