

В. Н. УКРАИНЕЦ

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ ОБДЕЛКИ ТОННЕЛЯ НА СОСТОЯНИЕ ДНЕВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ДВИЖУЩЕЙСЯ СКРУЧИВАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ

Исследованию воздействия движущейся вдоль тонкой, бесконечно длинной оболочки скручивающей нагрузки посвящена работа [1]. В статье [2] рассмотрено действие подвижной периодической нагрузки на круговую цилиндрическую полость в упругом полупространстве.

В настоящей работе изучается влияние цилиндрической обделки на напряженно-деформированное состояние (НДС) дневной поверхности при воздействии движущейся вдоль оси тоннеля скручивающей периодической нагрузки. Подобное воздействие может иметь место в тоннелях мелкого заложения при неравенстве динамических нагрузок, передаваемых на каждый из рельсов, уложенных в тоннеле цилиндрической формы, или при вращательном движении очистных устройств в подземном трубопроводе.

Обделка тоннеля моделируется тонкой оболочкой бесконечной длины, массив – упругой однородной и изотропной средой. Контакт между оболочкой и средой полагается скользящим.

1. Рассмотрим круговой цилиндрический тоннель радиуса $r=R$, подкрепленный тонкой упругой оболочкой толщиной h_0 , в линейно-упругом, однородном и изотропном массиве. Пусть в декартовой системе координат ось Z совпадает с осью полости и параллельна дневной поверхности, а ось X перпендикулярна к ней: $x \leq h$, где h – расстояние от оси полости до границы полупространства. Вдоль оси полости с постоянной скоростью c движется скручивающая нагрузка P . В силу малости толщины оболочки можно принять, что окружающая среда контактирует с оболочкой вдоль ее срединной поверхности.

Физико-механические свойства материала оболочки и среды характеризуются следующими постоянными: $\nu_0, \mu_0, \rho_0; \nu, \mu, \rho$, где ν – коэффициент Пуассона, μ – модуль сдвига, ρ – плотность.

Для описания движения такой конструкции воспользуемся подвижной системой координат ($\eta = z - ct$). Движение оболочки описывается классическими уравнениями теории тонких оболочек (1), а среды – динамическими уравнениями теории упругости (2):

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0} \right] \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta^2} + \frac{1-\nu_0}{2R^2} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \theta^2} + \\ & + \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \eta} = 0, \\ & \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{(1-\nu_0)}{2} \left(1 - \frac{\rho_0 c^2}{\mu_0} \right) \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta^2} + \\ & + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \theta} = \frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} P, \\ & \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0\theta}}{\partial \theta} + \frac{h_0^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 u_{0r} + \\ & + \frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0} \frac{\partial^2 u_{0r}}{\partial \eta^2} + \frac{u_{0r}}{R^2} = \frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} q_r, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{M_p^2} - \frac{1}{M_s^2} \right) \text{grad div } \vec{u} + \frac{1}{M_s^2} \nabla^2 \vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \eta^2}, \quad (2)$$

где $u_{0\eta}, u_{0\theta}, u_{0r}$ – перемещения точек срединной поверхности оболочки; $q_r = \sigma_{rr}|_{r=R}$ – радиальная реакция окружающей оболочку среды; σ_{rr} – радиальные напряжения в среде; \vec{u} – вектор смещения

упругой среды; $\lambda = 2\nu\mu/(1-2\nu)$; ∇^2 – оператор Лапласа; $M_p = c/c_p, M_s = c/c_s$ – числа Маха; $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости распространения волн расширения – сжатия и сдвига в среде.

Так как граница полупространства свободна от нагрузок, то при $x = h$:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{x\eta} = 0. \quad (3)$$

Для точек сопряжения среды с оболочкой имеем

$$\sigma_{rj}|_{r=R} = 0, \quad j = \eta, \theta, \quad u_r|_{r=R} = u_{0r}, \quad (4)$$

Преобразуем уравнение (2), выразив вектор смещения упругой среды через потенциалы Ламе:

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi_1 + \text{rot } \vec{\psi}. \quad (5)$$

Потенциал $\vec{\psi}$ можно представить в виде:

$$\vec{\psi} = \varphi_2 \vec{e}_\eta + \text{rot}(\varphi_3 \vec{e}_\eta),$$

где \vec{e}_η – орт оси η .

Из (2) и (5) следует, что потенциалы φ_j удовлетворяют видоизмененным волновым уравнениям:

$$\nabla^2 \varphi_j = M_j^2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \eta^2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Здесь $M_1 = M_p, M_2 = M_3 = M_s$.

Рассмотрим периодическую задачу, когда подвижная нагрузка периодична по η и представима в виде:

$$P(\theta, \eta) = P^*(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad P^*(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\theta}; \quad i^2 = -1. \quad (7)$$

В установившемся состоянии зависимость всех величин от η имеет вид (7), поэтому для тонкой оболочки имеем

$$q_r(\theta, \eta) = q_r^*(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad q_r^*(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_{nr} e^{in\theta};$$

$$u_{0j}(\theta, \eta) = u_{0j}^* e^{i\xi\eta}, \quad u_{0j}^*(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{0nj} e^{in\theta}, \quad j = r, \theta, \eta. \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (1), для n -го члена разложения получаем

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1^2 u_{0n\eta} + \nu_2 n \xi_0 u_{0n\theta} - 2i\nu_0 \xi_0 u_{0nr} = 0, \\ & \nu_2 n \xi_0 u_{0n\eta} + \varepsilon_2^2 u_{0n\theta} - 2inu_{0nr} = G_0 P_n, \end{aligned} \quad (9)$$

$$2i\nu_0 \xi_0 u_{0n\eta} + 2inu_{0n\theta} + \varepsilon_3^2 u_{0nr} = -G_0 q_{nr},$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2 &= \alpha_0^2 - \varepsilon_0^2, \quad \varepsilon_2^2 = \beta_0^2 - \varepsilon_0^2, \quad \varepsilon_3^2 = \gamma_0^2 - \varepsilon_0^2, \quad \varepsilon_0^2 = \\ &= \nu_1 \xi_0^2 M_{s0}^2, \quad \xi_0 = \xi R, \quad \alpha_0^2 = 2\xi_0^2 + \nu_1 n^2, \end{aligned}$$

$$\beta_0^2 = v_1 \xi_0^2 + 2n^2, \gamma_0^2 = \chi^2 (\xi_0^2 + n^2)^2 + 2, v_1 = 1 - v_0, v_2 = 1 + v_0, M_{S0} = c/c_{S0},$$

$$c_{S0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}, \chi^2 = \frac{h_0^2}{6R^2}, G_0 = \frac{v_1 R^2}{\mu_0 h_0}.$$

Разрешая (9) относительно $u_{0n\eta}, u_{0n\theta}, u_{0nr}$, получаем

$$\begin{aligned} u_{0n\eta} &= \frac{G_0}{\Delta_0} (\Delta_{\eta\theta}^0 P_n - \Delta_{\eta r}^0 q_{nr}), \\ u_{0n\theta} &= \frac{G_0}{\Delta_0} (\Delta_{\theta\theta}^0 P_n - \Delta_{\theta r}^0 q_{nr}), \\ u_{0nr} &= \frac{G_0}{\Delta_0} (\Delta_{r\theta}^0 P_n - \Delta_{rr}^0 q_{nr}). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - (\varepsilon_1 \xi_1)^2 - (\varepsilon_2 \xi_2)^2 - (\varepsilon_3 \xi_3)^2 + 2\xi_1 \xi_2 \xi_3, \\ \Delta_{\eta\theta}^0 &= \xi_1 \xi_2 - \xi_3 \varepsilon_3^2, \Delta_{\eta r}^0 = i(\varepsilon_2^2 \xi_2 - \xi_1 \xi_3), \\ \Delta_{\theta\theta}^0 &= (\varepsilon_1 \varepsilon_3)^2 - \xi_2^2, \Delta_{\theta r}^0 = i(\varepsilon_1^2 \xi_1 - \xi_2 \xi_3), \\ \Delta_{r\theta}^0 &= -\Delta_{\theta r}^0, \Delta_{rr}^0 = (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 - \xi_3^2, \\ \xi_1 &= 2n, \xi_2 = 2v_0 \xi_0, \xi_3 = v_2 \xi_0 n. \end{aligned}$$

Потенциалы Φ_j также будем искать в виде периодических функций по η :

$$\Phi_j(r, \theta, \eta) = \Phi_j(r, \theta) e^{i\xi\eta}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (6), получаем видоизмененные уравнения Гельмгольца:

$$\nabla_2^2 \Phi_j - m_j^2 \xi^2 \Phi_j = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Здесь $m_j^2 = 1 - M_j^2, m_1 \equiv m_p, m_2 = m_3 \equiv m_s, \nabla_2^2$ - двумерный оператор Лапласа.

Предположим, что скорость нагрузки меньше скорости распространения волн сдвига в окружающей среде («дозвуковой» случай). В этом случае $M_s < 1 (m_2 = m_3 = m_s > 0)$ и решения уравнений (12) можно представить в виде

$$\Phi_j = \Phi_j^{(1)} + \Phi_j^{(2)}, \quad (13)$$

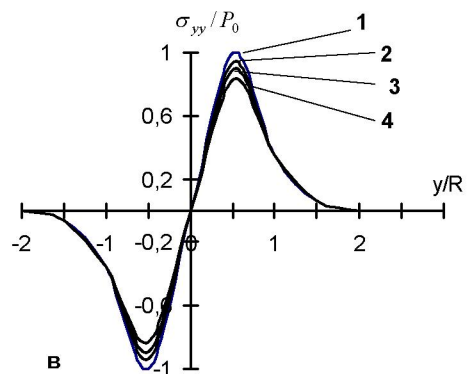
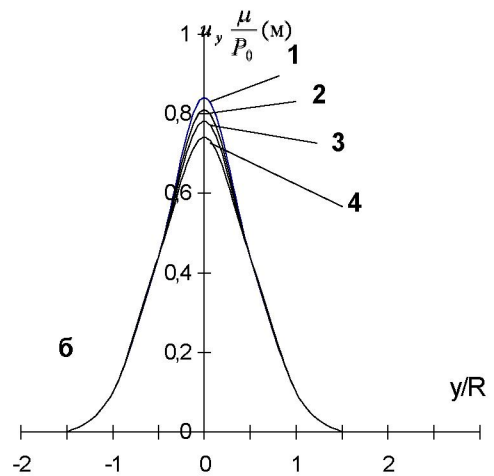
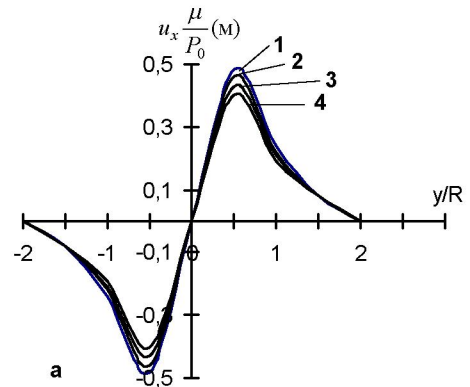
где

$$\Phi_j^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_j r) e^{in\theta}, \quad (13, a)$$

$$\Phi_j^{(2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} g_j(\xi, \eta) \exp(iy\xi + (x-h)\sqrt{\xi^2 + k_j^2}) d\xi. \quad (13, б)$$

Здесь $K_n(k_j r)$ - функции Макдональда, $k_j = m_j \xi$; $g_j(\xi, \eta), a_{nj}$ - неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Как показано в работе [2], представление потенциалов в форме (13) при использовании (3), (4), (10) приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_{nj} , для решения которой может быть использован метод последовательных отражений. Определив коэффициенты a_{nj} , можно вычислить компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС) среды. Вместе с тем из [2] следует, что в случае представления (13, б) интегралом Фурье скорость движущейся нагрузки c должна быть меньше



Изменения компонент НДС среды на границе полупространства при разных толщинах крепи тоннеля

скорости волны Релея c_R в упругом полупространстве. В этом случае для вычисления определенных интегралов можно воспользоваться численными методами интегрирования.

2. Исследуем влияние обделки тоннеля на НДС дневной поверхности при воздействии движущейся со скоростью $c = 100$ м/с осесимметричной скручивающей нагрузки, с периодом по $\eta - 2\pi$ и амплитудой P_0 . Материал оболочки – бетон ($\nu_0 = 0,25$, $\mu_0 = 4,508 \cdot 10^3$ МПа, $\rho_0 = 7 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_{s0} = 802,5$ м/с), среда – алевролит ($\nu = 0,2$, $\mu = 2,5 \cdot 10^3$ МПа, $\rho = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_s = 1006,4$ м/с), радиус полости $R = 3$ м, глубина заложения тоннеля $h = 1,2R$. Заметим, что скорость движения нагрузки меньше критической.

На рисунке, в плоскости $\eta=0$, изображены кривые изменения НДС дневной поверхности. Кривая 1 соответствует неподкрепленной полости, кривые 2, 3, 4 – подкрепленной полости с соответствующими толщинами крепей – 2 см, 5 см, 10 см.

Из анализа графиков следует, что в окрестности поверхности над выработкой наличие крепи ведет к уменьшению перемещений и напряжений. С увеличением толщины оболочки этот эффект усиливается.

При возрастании $|y|$ происходит быстрое затухание компонент НДС, и при $|y| \geq 2R$ они практически равны нулю во всех рассмотренных случаях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пожуев В.И. Действия подвижной скручивающей нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строительная механика и расчет сооружений. 1984. №6. С. 58-61.
2. Айташев Ш.М., Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Влияние свободной поверхности на тоннель мелкого заложения при действии подвижных нагрузок // Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. Алма-Ата, 1986. №5. С. 75-80.

Summary

In persisting work is studied influence cylindrical обделки on tense-deformed condition to day surface, at influence moving along axis of the subway twisting periodic load. Obdelka subway is prototyped by fine shell of the endless length, array – a springy uniform ambience. The contact between shell and ambience relies on slithering. Moving the shell is described by classical equations to theories fine shell, but surrounding ambiances – a dynamic equations to theories to bounce.

The decision is received for velocities of the moving load, below critical. Under the numerical realization of the problem, for determination factor, is used method of the consequent reflections. The Results calculation are presented in the manner of graph.

УДК 539.3:534.1

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 2.04.06г.