ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А.* Синтез плоских механизмов. М.: Госиздат, 1959. 1084 с.

2. *Канлыбаев О.* Уравнение кинематики пространственного рычажного механизма IV класса // Вестник МОН НАН РК. Алматы, 2003. Вып, № 1. С. 45-52.

3. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1986. 544 с.

4. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М., 2003. 431 с.



**Резюме**

IV класты кеңістікті механизмнің жетекші буыны мен шығыс буынның берілген жағдайына байланысты осы механизмнің жеті параметрлерінің синтез есебі қарастырылды. Үш белгісізі бар үш теңдеуден құралған дәрежелі теңдеулер жүйесінің бір белгісізін шығару шешімі көрсетілген.

**Summary**

The task of synthesis of seven parameters of a spatial mechanism of IV class upon set positions of input and output links is considered. The solving of excluding of unknown from a system of the power multinomials with the unknowns


УДК 621.01:531

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби* *Поступила 10.12.05г.*

*Л. П. ФАЛАЛЕЕВ*

# О ПОРЯДКАХ УБЫВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Найдены оценки порядков убывания коэффициентов Фурье по тригонометрической системе функций из пространств С. Л. Соболева, С. М. Никольского, О. В. Бесова $(p \geq 2)$. Сходимость последовательности понимается при этом в смысле Чезаро, Рисса или Зигмунда. Результаты данной работы анонсированы в [2, 3].

Напомним, что $2\pi$ -периодическая функция

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

принадлежит пространству С. М. Никольского $H_p^{(r)}$, $2 \leq p \leq \infty$, $r = \bar{r} + \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, $\bar{r} \geq 0$ целое число, если *f*(*x*) имеет $\bar{r}$ -ю производную такую, что $f^{(\bar{r})} \in L_p$, $p \geq 2$ и

$$\left\| f^{(\bar{r})}(x+h) - 2f^{(\bar{r})}(x) + f^{(\bar{r})}(x-h) \right\|_p \leq |h|^\alpha,$$

причем в этом неравенстве для $0 < \alpha < 1$ вторую разность можно заменить первой.

А. Ф. Тиман и М. Ф. Тиман в 1950 г. показали (см. также [1]), что если $f(x) \in H_p^{(r)}$, то ее коэффициенты Фурье необходимо удовлетворяют условию

$$\left( \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0\left( \frac{1}{n^r} \right), \quad 2 \leq p \leq \infty. \qquad (1)$$

Причем это условие не уточняемо на всем классе $H_p^{(r)}$.

Определим, каков порядок стремления к 0 коэффициентов Фурье функций из классов $H_p^{(r)}$, если сходимость последовательности понимать в смысле $\Lambda$-методов суммирования (Чезаро, Рисс, Зигмунд).

**Теорема 1.** Для $\Lambda$-методов при $\alpha > \frac{1}{2}$ справедлива оценка $(n \to \infty)$ $n^\beta |c_n| = \overline{\overline{0}}(1)$, $\beta \in \left( r - \frac{1}{2}, \quad r + \frac{1}{2} \right)$.

*Доказательство.* Воспользуемся асимптотикой чисел Чезаро

$A_n^\alpha \approx c \cdot n^\alpha, \quad n \to \infty, \quad \alpha > -1, \quad c > 0, \quad c = const.$

В силу неравенства Гельдера и условия (1) имеем

$$\mathrm{A}_n^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}_{n-k}^{\alpha-1}|c_k|\cdot k^{\beta}\le$$

$$\le c\cdot n^{-\alpha}\left\{\sum_{k+1}^{n}|c_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}_{n-k}^{(\alpha-1)2}\cdot k^{2\beta}\right\}^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le c\cdot n^{-\alpha}\left(c+0\left(n^{-r}\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}_{n-k}^{2(\alpha-1)}\cdot k^{2\beta}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=c\cdot n^{\beta-r-\frac{1}{2}}\to 0\ \text{ при }\ \beta<r+\frac{1}{2}.$$

Использованные выкладки применимы при следующих необходимых условиях, накладываемых на параметры $\alpha$, $\beta$, $r$:

$$\begin{cases}\beta>r-1+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta>r-\dfrac{1}{2},\\ \alpha>\dfrac{1}{2}.\end{cases}\\ 2\alpha-2>-1\end{cases}$$

Будем говорить, что $2\pi$-периодическая функция $f(x)$ принадлежит пространству С. Л. Соболева $W_p^{(r)}$, где $1\le p<\infty$, $r>0$, если ее среднее значение на периоде равно 0: $\int_0^{2\pi}f(x)dx=0$, имеет $r$-ю производную в смысле Вейля, принадлежащую $L_p$: $f^{(r)}(x)\in L_p$.

Для $f(x)\in W_p^{(r)}$ установлено (см. [1]), что коэффициенты Фурье необходимо удовлетворяют условию

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 k^{2r}<\infty \tag{2}$$

(эта оценка также неуточняема на всем классе $W_p^{(r)}$).

**Теорема 2.** На классе $W_p^{(r)}$ $2\le p<\infty$ для $\Lambda$-методов при $\alpha>\frac{1}{2}$ справедлива оценка $(n\to\infty)$

$$n^{\beta}|c_n|=\overline{\overline{0}}(1),\quad \beta\in\left(r-\frac{1}{2},\quad r+\frac{1}{2}\right).$$

*Доказательство.* Образуем суммы Чезаро и воспользуемся неравенством (2)

$$\mathrm{A}_n^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}_{n-k}^{\alpha-1}|c_k|\cdot k^{\beta}=c\cdot n^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}|c_k|\cdot\mathrm{A}_{n-k}^{\alpha-1}\cdot k^{\beta}=$$

$$=c\cdot n^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}|c_k|\cdot k^{r}\mathrm{A}_{n-k}^{\alpha-1}\cdot k^{\beta-r}\le$$

$$\le c\cdot n^{-\alpha}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2\cdot k^{2r}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}_{n-k}^{(\alpha-1)2}\cdot k^{(\beta-r)2}\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=c\cdot n^{-\alpha}\overline{\overline{\ }}\left[n^{2\alpha-2+2\beta-2r+1}\right]\quad c\cdot n^{\beta-r-\frac{1}{2}}\to 0$$

$$\text{при }\ \beta<r+\frac{1}{2}.$$

Другие ограничения на параметры $\alpha$, $\beta$, $r$ получены из соотношения

$$\mathrm{A}_n^{\alpha+\beta+1}=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}_{n-k}^{\alpha}\mathrm{A}_k^{\beta},$$

справедливого при $\alpha$, $\beta$, $\alpha+\beta>-1$:

$$2(\alpha-1)>-1,$$
$$2(\beta-r)>1,$$
$$2(\alpha-1)+2(\beta-r)>-1,$$

чем завершается доказательство теоремы.

Рассмотрим класс О. В. Бесова $B_p^{(r)}$. $2\pi$-периодическая функция $f(x)\in B_p^{(r)}$, $1\le p<\infty$, $r=\bar{r}+\alpha$, $0<\alpha\le 1$, $\bar{r}>0$ целое число, если $f(x)$ имеет $\bar{r}$-ю производную $f^{(\bar{r})}(x)\in L_p$ и, кроме того,

$$\int_0^1 t^{-\alpha p-1}\omega_{1+[\alpha]}f^{(\bar{r})}(t)_p\,dt<\infty,$$

где

$$\omega_k(\varphi,t)=\sup_{|h|\le t}\left\|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}c_n^k\varphi(x+kh)\right\|_p.$$

Определим порядки стремления к 0 коэффициентов Фурье функций из $B$-пространств. Сходимость последовательности будем понимать в смысле $\Lambda$-методов. Для простоты изложения доказательство теоремы будем проводить для метода Чезаро. Для методов Рисса и Зигмунда оно аналогично (см. [4 и 5]).

**Теорема 3.** На классе $B_p^{(r)}$, $2\le p<\infty$ для $\Lambda$-методов при $\alpha>\frac{1}{2}$ справедлива оценка $(n\to\infty)$

$$n^{\beta}|c_n| = \overline{\overline{0}}(1), \quad \beta \in \left(r-\frac{1}{2}, \quad r+\frac{1}{2}\right).$$

*Доказательство*. В работе [1] показано, что коэффициенты Фурье функции из пространства $B_p^{(r)}$ при $2 \le p < \infty$ необходимо удовлетворяют условию

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(c \quad \right) \cdot k^{2r} \varphi^{\frac{2-p}{2}} \left(|k|+1\right) < \infty, \qquad (3)$$

где $\varphi(n) \le \varphi(n+1)$, $n = 1,2,...,$ $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\varphi(n)} < \infty$,

при этом $\varphi(n)$ нельзя заменить ни 1, ни $\lambda nn$.

Несложно провести следующие выкладки, используя неравенство Гельдера и неравенство (3):

$$c \cdot n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} |c_k| \mathrm{A}_{n-k}^{\alpha-1} \cdot k^{\beta} = c \cdot n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} |c_k| \cdot k^{r} \mathrm{A}_{n-k}^{\alpha-1} \cdot k^{\beta} \times$$

$$\times k^{-\Gamma} \varphi^{\frac{2-p}{4}} (k+1) \cdot \varphi^{\frac{p-2}{4}} (k+1) \le$$

$$\le c \cdot n^{-\alpha} \left[ \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \cdot k^{2r} \cdot \varphi^{\frac{2-p}{2}} (k+1) \right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[ \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{n-k}^{(\alpha-1)2} \cdot k^{(\beta-r)2} \cdot \varphi^{\frac{p-2}{2}} (k+1) \right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c \cdot n^{-\alpha} \left[ \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{n-k}^{(\alpha-1)^2} \cdot k^{(\beta-r)^2} \cdot \varphi^{\frac{p-2}{2}} (k+1) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Полагая в (4) $\varphi_{(n)} = n^{\delta}$, $\delta > 0$, получаем

$$c \cdot n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} |c_k| \mathrm{A}_{n-k}^{\alpha-1} \cdot k^{\beta} \le$$

$$\le c \cdot n^{-\alpha} \left[ \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{n-k}^{(\alpha-1)^2} \cdot k^{(\beta-r)^2} \cdot k^{\frac{p-2}{2}} \delta + 1 \right] =$$

$$= c \cdot n^{\beta - r + \frac{p-2}{4}} \delta - \frac{1}{2} \to 0, \; n \to \infty$$

при $\beta < r + \frac{1}{2}$ в силу произвольной малости $\delta > 0$.

Дополнительные ограничения на параметры $\alpha$, $\beta$, $r$ порождены неравенствами

$$\begin{cases} 2(\alpha-1) > -1, \\ 2(\beta-r) > -1, \\ 2(\alpha-1) + 2(\beta-r) > -1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha > \frac{1}{2}, \\ \beta \in \left(r-\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2}\right). \end{array}$$

Теорема доказана полностью. Доказательство сформулированных теорем для методов Рисса и Зигмунда аналогично (см. [4 и 5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Потапов М.К.* О коэффициентах Фурье // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Баку, 1965. С. 475-483.

2. *Фалалеев Л.П.* О поведении коэффициентов Фурье функций из различных пространств // Международная конф. «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ» (Москва. 23-29 мая 2005 г.), посвященная столетию Сергея Михайловича Никольского (родился 30.04.1905 г.). Тезисы докладов. С. 233.

3. *Фалалеев Л.П.* О порядке убывания коэффициентов Фурье // Международная конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики», посвященная 75-летию ТулГУ и 85-летию со дня рождения профессора С. Б. Стечкина. Тула, 2005.

4. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М., 1951. 505 с.

5. *Фалалеев Л.П.* О точных константах для матричных методов суммирования // Сиб. матем. журнал. 1995. Т. 36, № 4. С. 927-933.

**Резюме**

С. М. Никольский, С. Л. Соболев, О. В. Бесов кеңістіктерінен алынған функциялардың кему реті бағаланған. Мұнда тізбектің жинақталуы Фурье коэффициенттерінің Чезаро мағынасында берілген.

**Summary**

The asymptotic behavior of Fourier coefficients of functions from the Nikilskii, Sobolev and Besov spaces is obtained. The sequence of coefficient in considered in Cesaro, Riesz, or Zygmund sence.

УДК 517.51

*Институт математики*
*МОН РК*

*Поступила 23.02.06г.*