Посвящается светлой памяти академика
УМИРЗАКА МАХМУТОВИЧА СУЛТАНГАЗИНА

А. Ш. АКЫШ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

1. Введение. Кинетические уравнения, к которым относится уравнение переноса излучения, – это своеобразный класс многомерных интегро-дифференциальных уравнений математической физики. А теория переноса излучения – один из ведущих разделов современной науки, быстро развивающийся на основе теоретических достижений и глубоко проникающий в различные области естествознания и техники.

В настоящее время число приложений уравнения переноса чрезвычайно велико. Они включают описание рассеяния излучения в самых различных областях, таких, как астрофизика, атмосферная оптика, биофизика, геофизика и т.д. Кроме того, они охватывают широкий класс задач теории переноса нейтронов, где вместо яркости фигурирует функция распределения нейтронов по координатам и скоростям. Причина такого прогресса – неуклонно возрастающая роль математических исследований в проектировании ядерных реакторов и в задачах атмосферной оптики, а также существенное развитие вычислительной математики и высоко производительных компьютеров.

В отличие от других разделов математической физики, для которых характерна известная завершенность математических основ, теория переноса излучения долгое время не имела достаточно строгого обоснования.

В свое время известная монография Г. И. Марчука[1] сыграла основополагающую роль в становлении и систематизации методов расчета ядерных реакторов, а работа В. С. Владимирова[2] заложила основу для теоретических исследований свойств решений краевых задач для стационарного уравнения переноса. В последующем, на стыке этих двух направлений, в математическую теорию переноса излучения внесен существенный вклад и в Казахстане У. М. Султангазиным и его учениками.

Весьма общая задача теории переноса излучения ставится так: найти решение уравнения переноса в области $Q=[0,T]\times\Omega\times G$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+(\omega, gradU)+\sigma(x)U=$$

$$=\frac{\sigma_S(x)}{4\pi}\int_\Omega g(\omega,\omega')U(t,\omega',x)d\omega'+f(t,\omega,x), \quad (1)$$

удовлетворяющего следующим начальным и граничным условиям:

$$U(0,\omega,x)=\varphi(\omega,x); \quad U(t,\omega,x)|_\Gamma=0$$

$$\text{при} \quad (\mathbf{n},\omega)<0, \quad (2)$$

где $U=U(t,\omega,x)$ – функция распределения нейтронов, летящих в направлении $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ в точке $x=(x_1,x_2,x_3)$ трехмерного евклидова пространства R_3 в момент времени $t\in(0,T]$; $f(t,\omega,x)$ – функция источников; $\sigma(x)$, $\sigma_S(x)$ – сечения, характеризующие свойства среды; $g=g(\omega,\omega')$ – индикатриса рассеяния, она зависит от направлений ω,ω' лишь посредством косинуса угла между ними; Ω – единичная сфера направлений ω; область G, где происходит процесс переноса нейтронов, выпукла и ограничена кусочно-гладкой поверхностью Γ; $\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3)$ – единичный вектор внешней нормали в точке x границы Γ.

Как известно, для задачи (1), (2) построение методов решения и их обоснование требуют предварительного качественного изучения задачи. В работах У. М. Султангазина[3,4] построена

[1] Методы расчета ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1961.

[2] Математические задачи односкоростной теории переноса частиц: Тр. Мат. ин-та АН СССР. М., 1961. Т. 61. С. 3-158.

[3] Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. Алма-Ата: Наука, 1979.

[4] Дифференциальные свойства решений смешанной задачи Коши для нестационарного кинетического уравнения. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1971.

строгая математическая теория нестационарных уравнений переноса. В начальном разделе работы с помощью априорных оценок в пространстве $C([0,T];L_p(\Omega\times G))$ доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений смешанной задачи Коши (1), (2) для нестационарного кинетического уравнения, исследованы дифференциальные свойства и непрерывная зависимость решений от данных.

2. Метод сферических гармоник. Одним из эффективных методов решения кинетического уравнения является метод сферических гармоник (МСГ). Значимость этого метода при решении задач теории переноса лучше не опишешь, чем следующая цитата из монографии А. Вейнберга и Е. Вигнера, лауреата Нобелевской премии по физике[5]: “ ….В настоящее время, когда проделана большая работа по проектированию реакторов с помощью мощных цифровых вычислительных машин, все рассуждения о преимуществах одного метода аппроксимации перед другим сводятся к тому, насколько данный метод удобен для счетных машин. Но, так как вычислительные машины становятся все мощнее, вопрос о выборе методов приближения является все менее ясным: если счетная машина будет достаточно мощной, то в конце концов годится любой метод, который обеспечивает сходимость. Это практическая точка зрения. Однако удобство использования метода при машинных расчетах едва ли заменяет математическое изящество или физическую наглядность. В этом отношении метод сферических гармоник является, возможно, наиболее привлекательным...”.

Широкое применение этого метода в решении задач нейтронной физики и атмосферной оптики привело к необходимости качественного исследования свойств дифференциальных уравнений, возникающих в методе сферических гармоник, и сходимости их решений. В разработке метода сферических гармоник принимали участие С. Чандрасекар, Р. Маршак, Дж. Марк, Г. Бете, Л. Гонкс, Г. Гурвитц, Б. Дэвисон, В. С. Владимиров, Г. И. Марчук, С. К. Годунов, У. М. Султангазин, В. В. Смелов, Г. Я. Румянцев, С. Мика, А. С. Сакабеков, А. Ш. Акыш (Акишев) и др.

Обоснование этого метода для нестационарного уравнения переноса дано в работах С. К. Годунова, У. М. Султангазина[6] и У. М. Султангазина[7].

У. М. Султангазиным изучена следующая смешанная задача Коши для системы уравнений метода сферических гармоник в произвольном приближении в области $Q=[0,T]\times G$

$$\mathbf{B}\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{A}_\alpha\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_\alpha}+\sigma\mathbf{B}\vec{U}=\sigma_S\mathbf{BG}\vec{U}+\mathbf{B}\vec{f}, \quad (3)$$

$$\vec{U}(t,x)\big|_{t=0}=\vec{\varphi}(x);\ \mathrm{M}\vec{U}(t,z)\,|_{z\in\Gamma}=0, \quad (4)$$

где $\vec{U}(t,x)=\{U^m_{c,k}(t,x),\ k=\overline{0,N};\ m=\overline{0,k};\ U^m_{s,k},\ k=\overline{1,N};\ m=\overline{1,k}\}$ – неизвестная вектор-функция; $\vec{f}(t,x)=\{f^m_{c,k}(t,x),\ k=\overline{0,N};\ m=\overline{0,k};\ f^m_{s,k},\ k=\overline{1,N};\ m=\overline{1,k}\}$ – известная вектор-функция источников; $\mathbf{B}$ – положительно-определенная матрица, $\mathbf{G},\mathbf{A}_\alpha$ (α = 1,2,3) – симметрические матрицы с $(N+1)^2\times(N+1)^2$ – элементами; $\vec{\varphi}(t,x)=\{\varphi^m_{c,k}(t,x),\ k=\overline{0,N};\ m=\overline{0,k};\ \varphi^m_{s,k},\ k=\overline{1,N};\ m=\overline{1,k}\}$ – известная начальная вектор-функция; $\mathbf{M}$ – прямоугольная матрица размерности $N(N+1)/2\times(N+1)^2$.

Приближенное решение задачи (1), (2) восстанавливается по решению задачи (3), (4) формулой

$$U\approx U_N(t,\omega,x)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{k}\beta^m_k\Big(U^m_{c,k}(t,x)C^m_k(\omega)+ +U^m_{s,k}(t,x)S^m_k(\omega)\Big), \quad (5)$$

где $\{C^m_k(\omega),S^m_k(\omega)\}$ – сферические функции, β^m_k – числовые коэффициенты нормировки.

Вывод системы нестационарных уравнений метода сферических гармоник (3) из уравнения переноса (1), описание структуры матрицы коэффициентов $\mathbf{G},\mathbf{A}_\alpha$ (α = 1,2,3) получены в монографии У. М. Султангазина[8] и показано, что система (3) является симметрической гиперболической системой по Фридрихсу, а граничные условия Владимирова – Маршака для систем

[5] Физическая теория ядерных реакторов. М., 1961. С. 255.
[6] Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1971. Т. 11, № 3.
[7] Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1974. Т. 14, № 1.
[8] Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. Алма-Ата: Наука, 1979.

$\mathbf{P}_N$-приближения – максимально диссипативными. Им доказаны существование, единственность и сходимость обобщенного решения симметрических систем МСГ к решению нестационарной задачи для уравнения переноса излучения при произвольных индикатрисе рассеяния и функции источников. Оригинальным вкладом У. М. Султангазина в теорию метода сферических гармоник является также применение и обоснование метода расщепления сложного оператора задачи (3), (4) на последовательность более простых, эффективно реализуемых с помощью ЭВМ. Доказана сходимость расщепленной задачи к решению задачи (3), (4). При помощи специального приема для каждого дробного шага построены устойчивые разностные схемы с направленными разностями. За эти выдающиеся вклады в математическую теорию переноса частиц У. М. Султангазину присуждена Государственная премия СССР (1987 г.).

У. М. Султангазиным была установлена международная связь между казахстанскими и чехословацкими учеными для углубленного исследования математической задачи переноса нейтронов. Одним из результатов совместных исследований является монография[9], выпущенная авторским коллективом в составе У. М. Султангазина, В. В. Смелова, А. Ш. Акишева, А. С. Сакабекова, И. Марека, С. Мика, И. Житны. Она была удостоена премии Академии наук СССР и Академии наук Чехословакии как лучшая совместная работа в области естественных наук (1989 г.).

В дальнейшем исследования по теории переноса излучения, начатые У. М. Султангазиным, под его руководством продолжали его ученики[10]: А. Ш. Акыш, Г. К. Кайшибаева, А. С. Сакабеков, С. Мика, Г. М. Сыдыков, И. Ш. Иркегулов, Т. З. Мулдашев и др.

В процессе применения и развития МСГ возникли различные математические проблемы, которые требовали обоснованных ответов. Отметим вкратце содержание этих проблем.

В свое время для нечетных $\mathbf{P}_{2r+1}$-приближений В. С. Владимиров сформулировал “наилучшие” граничные условия на основе вариационного принципа и показал, что стационарное уравнение переноса излучения и система уравнений МСГ в нечетном приближении могут быть записаны в симметрической и положительно-определенной форме, если индикатриса рассеяния и функция источников являются четными функциями по угловым переменным.

В случаях плоской и сферической геометрий такие граничные условия эмпирически установлены на численных примерах Маршаком. В произвольном $\mathbf{P}_N$-приближении граничные условия на границе раздела сред получены Г. Я. Румянцевым. В случае произвольных индикатрисы рассеяния и функции источников симметризация системы стационарных уравнений МСГ в $\mathbf{P}_{2r+1}$-приближении и взаимосвязь между условиями Владимирова и Румянцева были установлены В. В. Смеловым.

Приведение к такой форме четного $\mathbf{P}_{2r}$-приближения оставалось дискуссионным вопросом из-за неудачных выборов граничных условий на внешней границе. И долгое время не было ясно, к какому типу дифференциальных уравнений математической физики относится система, приведенная к симметрической и положительно-определенной форме в стационарном случае. В связи с этим вопрос В. С. Владимирова (“будут ли обратные операторы симметризованной и положительно-определенной системы вполне непрерывны из L_2 в L_2) оставался актуальной задачей теории переноса излучения.

В работах А. Ш. Акишева[11] были обобщены результаты работ В. С. Владимирова, В. В. Смелова и даны ответы на вышеперечисленные вопросы. Там же был установлен ряд новых свойств системы уравнений МСГ. На основе этих свойств сформулированы граничные условия на внешней границе и на границе раздела двух сред для любого $\mathbf{P}_N$-приближения по единому алгоритму. Оказалось, что симметрическая и положительно-определенная система стационарных уравнений МСГ с произвольными входными данными и при любом $\mathbf{P}_N$-приближении принадлежит к типу сильно эллиптических систем. Из этого утверждения следует полная непрерывность ее обратного оператора, т.е. разрешимость ее в соболевском пространстве W_2^1 и сходимость в этом же

[9] Математические проблемы кинетической теории переноса. Алма-Ата, 1986.

[10] Перечисляется согласно дате зачисления в аспирантуру.

[11] Об одном вопросе академика В. С. Владимирова в теории переноса излучения. Алма-Ата. Деп. в КазЦИНТИ, 27.01.81; Успехи матем.наук. 1982. Т. 37. № 5; Aplikace Matematiky. Praha, 1984. Vol. 29, N 3.

пространстве приближенного решения, построенного вариационными методами. Доказана сильная сходимость последовательности решений $\{U_N\}$ системы нестационарных уравнений МСГ (3), (4) к решению задачи (1), (2) кинетического уравнения в пространстве $C([0,T];L_2(\Omega\times G))$.

В работах А. Сакабекова[12] изучены краевые задачи для стационарной системы уравнений МСГ с разрывными коэффициентами в X-Y и RZ-геометриях в областях с негладкой границей. При помощи исключения стационарные системы уравнений МСГ в X-Y и RZ-геометриях при условиях Владимирова-Маршака сведены к сильно-эллиптическим системам уравнений 2-го порядка с граничными условиями, удовлетворяющими условиям Шапиро-Лопатинского. При этом система уравнений МСГ в RZ-геометрии сводится к сингулярной эллиптической системе дифференциальных уравнений 2-го порядка. Доказано существование единственного обобщенного решения рассматриваемых краевых задач в пространствах. Далее изучены особенности слабых решений системы уравнений МСГ в произвольном приближении в окрестности угловых точек, точек пересечения линий разрывов, а также в точках стыка линии разрыва и границы области. Получено асимптотическое разложение слабого решения в окрестностях вышеуказанных точек на особенную и гладкую части. Эти результаты используются при решении системы уравнений МСГ вариационно-разностным методом, так как знание вида особенностей слабых решений в окрестности угловых точек существенно для выделения этих особенностей при построении вариационно-разностных схем.

В 80-х годах В. В. Смеловым был разработан метод итерации по подобластям для решения задачи теории переноса излучения. Он дает возможность ослабить эффект многомерности уравнения путем крупноблочного распараллеливания вычислений по более простым областям, когда для продолжения итерации требуется запоминать лишь информацию о решении на границах раздела областей. Когда задача переноса решается с использованием МСГ, то в разных подобластях G_1, G_2 области G применяется МСГ в $\mathbf{P}_{\mathbf{N,M}}$-приближении соответственно с разными номерами N, M. И возник вопрос: как сформулировать граничные условия на границах раздела областей для $\mathbf{P}_{\mathbf{N,M}}$-приближений? Кроме того, изучая задачу для системы нестационарных уравнений МСГ в первоначальном виде (гиперболической системой по Фридрихсу (3), (4)), показать принадлежность решений из соболевского пространства W_2^1 затруднительно из-за структуры матриц коэффициентов МСГ.

В работах А. Ш. Акыш[13], с помощью разработанного им метода, выписаны граничные условия на границах раздела областей для $\mathbf{P}_{\mathbf{N,M}}$-приближений и показано, что полученные множества граничных условий содержат в себе известные математически обоснованные краевые условия Владимирова, Румянцева и Смелова. Там же нестационарная задача для системы уравнений МСГ (3), (4) в $\mathbf{P}_{\mathbf{N}}$-приближении сведена к системе второго порядка с начальными и импедансными граничными условиями:

$$\mathrm{B}_0\frac{\partial^2\vec U}{\partial t^2}-\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\mathrm{A}_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2\vec U}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\mathrm{D}\left(\frac{\partial\vec U}{\partial t}+\sigma\vec U\right)=\mathrm{B}_0\vec F, \tag{6}$$

$$\vec U|_{t=0}=\vec\varphi;\quad \left.\frac{\partial\vec U}{\partial t}\right|_{t=0}=\vec\Phi,$$

$$\mathrm{M}\left(\frac{\partial\vec U}{\partial t}+\sigma\vec U\right)+\mathrm{H}\frac{\partial\vec U}{\partial n}\Big|_\Gamma=0, \tag{7}$$

где матрицы $\mathbf{B_0}$, M, H положительно определены и симметричны.

Показано, что система уравнений (6) относится к классу сильно гиперболических систем, т. е. дифференциальный оператор, входящий в систему (6)

$$L\vec U\equiv\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\mathrm{A}_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2\vec U}{\partial x_\alpha\partial x_\beta},$$

является сильно эллиптическим. Построены априорные оценки. С их помощью доказана однозначная разрешимость задачи (6),(7) в классе обобщенных решений из $C([0,T];W_2^1(G))$. Первые два приближения P_1, P_2 соответствуют широко известным в математической физике телеграфному уравнению и динамическим уравнениям теории упругости относительно вектора упругих

[12] Известия АН КазССР. Серия физ.-мат. 1982. №3; там же. 1982. № 1; там же. 1984. № 3.

[13] Сиб. матем. журнал. Новосибирск, 2002. Т. 43, № 4.

смещений. Раньше такие факты не были известны. А они соответственно относятся к классам гиперболических уравнений и сильно гиперболических систем. Построение решения задачи для одномерного телеграфного уравнения с импедансным граничным условием методом преобразования Лапласа рассматривалось в работах М. А. Лаврентьева, Б. В. Шабата и Р. Куранта.

В работах У. М. Султангазина и Г. К. Кайшибаевой[14] получены блочно-диагональная и каноническая формы для системы уравнений МСГ с граничными условиями Маршака, которые позволили строить устойчивые конечно-разностные аппроксимации повышенного порядка точности по пространственной переменной. Исследовано асимптотическое поведение решения по временной переменной системы уравнений МСГ с граничными условиями Марка (без функции источника), показана ограниченность нормы решения от начальной функции по экспоненциальному закону.

У. М. Султангазиным и его учеником С. Мика[15] (Чехословакия) обобщен вывод системы нестационарных уравнений методом сферических гармоник (3) для многогрупповых уравнений переноса (1) и им доказаны существование, единственность и слабая сходимость обобщенного решения соответствующих систем МСГ к решению нестационарных многогрупповых задач уравнений переноса излучения.

И. Ш. Иркегуловым исследованы вопросы существования и единственности коэффициентных обратных задач для стационарного уравнения переноса излучения и стационарной системы уравнений МСГ и численные методы их решения. Для вертикально-неоднородной модели среды доказаны локальные, а в изотропном случае – глобальные теоремы существования и единственности коэффициентов рассеяния среды и плоскости границы. Применительно к задачам томографии построен и численно реализован алгоритм нахождения коэффициента ослабления неоднородной среды при выборе специального вида внешнего источника излучения. Получено явное представление решения системы уравнений МСГ через альбедо подстилающей поверхности. В случае линейной зависимости граничных векторов найдены необходимые и достаточные условия существования и единственности матрицы коэффициентов, а в случае линейно независимых граничных векторов доказана локальная теорема существования и единственности матрицы коэффициентов.

В работах У. М. Султангазина и Т. З. Мулдашева[16] разработан эффективный метод сглаживания приближенного решения МСГ, основанный на его уточнении, вычисленного в однократном приближении погрешности МСГ. Разработанный метод сглаживания, дополняя устойчивый метод А. Карпа численного интегрирования системы уравнений МСГ, позволяет эффективно использовать МСГ для расчетов поля рассеянного излучения плоской, неоднородной в вертикальном направлении атмосферы любой оптической толщины и с любой степенью анизотропии рассеяния. С помощью преобразования Лапласа и метода сферических гармоник разработан алгоритм численного решения нестационарной задачи переноса излучения в плоском слое мутной среды при освещении его верхней границы мгновенным бесконечно широким потоком параллельных лучей. Полученный алгоритм позволяет эффективно применять МСГ для решения нестационарных задач переноса излучения от бесконечно широкого импульсного источника в средах с высокой анизотропией рассеяния.

Г. М. Садыковым изучены дифференциальные и локальные свойства решений нестационарного уравнения переноса излучения в многозонной области с кусочно-гладкой границей и доказаны теоремы существования и единственности классического решения начально-краевой задачи для нестационарного уравнения переноса излучения, об областях гельдеровости интеграла столкновения, о дифференцируемости по временной и пространственным переменным интеграла столкновений. В случаях плоско-параллельной и сферически-симметричной геометрии получено

[14] Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1977. Т. 17, № 6; Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1978. Т. 9, № 5; Известия АН КазССР. Серия физ.-мат. 1983. №3.

[15] Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1975. Т. 6, № 4; Aplikace Matematiky. Praha, 1979. Vol. 24, N 2.

[16] Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1977. Т. 17, № 6; Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1987. № 6; Докл. АН РК. 1992. № 1.

асимптотическое представление производной по пространственной переменной от средней плотности вблизи границ зон. Далее изучены различные постановки обратных задач для нестационарного уравнения переноса излучения, а именно обратные задачи по нахождению пар “интенсивности излучения, коэффициента рассеяния” или “интенсивности излучения, коэффициента ослабления” при различных дополнительных условиях относительно потока, входящего через внешнюю границу.

3. Методы расщепления и конечных разностей. Уравнение переноса, являясь многомерным интегродифференциальным уравнением в частных производных первого порядка, имеет весьма сложную структуру и описывает гораздо более сложные физические процессы, чем, скажем, начально-краевая задача для параболического уравнения второго порядка, которая, как известно, является довольно грубым приближением для задачи (1), (2) (диффузионное приближение). Поэтому первоначально, чтобы удовлетворить нужды практики, были разработаны вычислительные алгоритмы в основном для одномерных задач переноса, а многомерные задачи были сведены к последовательностям одномерных. В работах У. М. Султангазина[17] было дано математическое обоснование метода расщепления, сводящего многомерные задачи переноса излучения к последовательностям одномерных. Им были построены абсолютно устойчивые схемы в энергетическом пространстве для численного решения начально-краевой задачи для уравнения переноса излучения. В последующем эти результаты послужили начальным стимулом научных исследований задачи теории переноса излучения и кинетической теории газов под руководством У. М. Султангазина в Казахстане.

При разработке разностных методов для задачи переноса интеграл по сфере аппроксимируется кубатурной формулой и задача (1), (2) в сеточной области $\widetilde{Q}_h^\tau = G^\tau \times \widetilde{\Omega} \times G_h$ заменяется, например, следующей разностной схемой:

$$\frac{U_{\nu_k,h}^{n+1} - U_{\nu_k,h}^{n}}{\tau} + \sum_{\sigma=1}^{3} \left|\omega_{\alpha,\nu_k}\right| \frac{E - T_\alpha^{\theta_k}}{h_\alpha} U_{\nu_k,h}^{n+1} +$$

$$+\sigma U_{\nu_k,h}^{n+1} = \sigma_S \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu g_{\nu,\nu_k} U_{\nu,h}^{n} + f_{\nu_k,h}^{n}, \; k = \overline{1,8}, \quad (8)$$

с начально-граничными условиями (2), где $\widetilde{\Omega}$ – объединение всех узлов кубатурной формулы, G^τ – сетка по времени, G_h – пространственная сетка; E – единичный оператор; $\mathbf{T}_\alpha^{\theta_k} U(.,x_\alpha,.) = U(.,x_\alpha + \theta_k h_\alpha,.)$ – операторы сдвига; $\theta_k = -\mathrm{sgn}(\omega_{\alpha,\nu_k})$.

Принципиальные вопросы теории устойчивости разностных схем известны из классических работ С. К. Годунова и В. С. Рябенького, Г. И. Марчука, А. А. Самарского, А. В. Гулина и др. Откуда следует, что наиболее распространенными способами исследования устойчивости разностных краевых задач являются метод разделения переменных, спектральные методы, метод энергетических неравенств и методы, основанные на принципе максимума, а также принцип замороженных коэффициентов при исследовании разностных схем с переменными коэффициентами. Известно, что устойчивость разностных схем в норме **C** может быть установлена не только на основе принципа максимума, но и иными методами. Например, если доказана устойчивость разностной задачи в λ_p при $\forall p \ge 1$, тогда из нее при $p = \infty$ следует устойчивость в норме **C**. Видимо, с этой целью в работах И. В. Коновальцева изучена устойчивость в пространстве λ_p двухслойной схемы для уравнения теплопроводности в одномерном случае с постоянными коэффициентами методом разложения разностного оператора в бесконечный ряд комплексной плоскости. И в работах Ш.С. Смагулова и его учеников были исследованы вопросы устойчивости, сходимости и гладкости разностных схем, соответствующих обыкновенным дифференциальным (двучленным) уравнениям четвертого и третьего порядков. И в других известных исследованиях устойчивость в пространстве λ_p основывается на фундаментальных решениях разностных задач. Однако построение фундаментальных решений многомерных разностных задач с переменными коэффициентами технически затруднительно.

До недавнего времени не были известны в теории устойчивости разносных схем способы исследования многомерных разностных задач с

[17] ДАН СССР. 1965. Т. 161, № 1; ДАН СССР. 1965. Т. 163, № 4; Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1965. Т. 5, № 5.

переменными коэффициентами в пространстве $\lambda_p, \forall p > 2$, аналогичные методам получения априорных оценок решений в норме пространства L_p исходных дифференциальных задач, например, как в названной монографии У. М. Султангазина.

В работах А. Ш. Акыш[18] создан новый метод исследования устойчивости двухслойных схем в функциональных пространствах λ_p, $1 < p \le \infty$, без привлечения фундаментальных решений разностных задач. Это дало возможность доказать устойчивость различных (явной, неявной, расщепления) схем типа (8), соответствующих многомерным задачам теории переноса излучения с постоянными и переменными коэффициентами в λ_p, $1 < p \le \infty$. Из нее при $p = \infty$ получена устойчивость в норме **C**. В частности, в случае постоянных коэффициентов уравнения переноса найдены оценки асимптотического поведения решения разностных схем (8) при $t \to \infty$, на всем интервале времени $(0,\infty)$ в норме пространства

$$\lambda_p(G^\tau; \lambda_p(G_h \times \tilde{\Omega})),\ 1 < p \le \infty,$$

т.е. установлена справедливость ценной оценки при проектировании ядерных реакторов:

$$\left\| U^{n+1} \right\|_{\lambda_p(G_h\times\tilde{\Omega})} \le C_1 \|\varphi\|_{\lambda_p(G_h\times\tilde{\Omega})} + C_2 \sup_{0\le s\le n} \left\| f^s \right\|_{\lambda_p(G_h\times\tilde{\Omega})},$$

$$1 < p \le \infty, \qquad (9)$$

где $C_1 = \exp(-\gamma\, t_{n+1}), C_2 = (1-\exp(-\gamma\, t_{n+1}))/\gamma, \gamma = = \sigma - \sigma_S (g_0)^{1/p} > 0,$

$$\|U\|_{\lambda_p(G_h\times\tilde{\Omega})} = \left(\sum_{G_h} h \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \left| U_{\nu,h} \right|^p \right)^{1/p}.$$

Новым методом, свободным от использования фундаментальных решений разностных задач, исследованы и доказаны устойчивость в пространстве $\lambda_p, \forall p > 2$ разнообразных разностных схем (явная, неявная, расщепления, расщепления с весом, продольно-поперечной прогонки), соответствующих диффузионным приближениям (уравнениям теплопроводности) с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x) \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \right) = f(t,x), U(0,x) = \varphi(x);$$

$$U(t,x)|_\Gamma = 0, \qquad (10)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in G = \{0 \le x_\alpha \le \lambda_{\alpha,} \alpha = \overline{1,3}\}, \Gamma$ – граница G, $t \in [0,T], T < \infty$.

Из множества изученных разностных задач для (10) является интересной из-за повышенной точности схема расщепления с весом

$$\frac{U_h^{n+\frac{\alpha}{3}} - U_h^{n+\frac{\alpha-1}{3}}}{\tau} - \left[\gamma \Lambda_{\alpha,h} U_h^{n+\frac{\alpha}{3}} + (1-\gamma)\Lambda_{\alpha,h} U_h^{n+\frac{\alpha-1}{3}} \right] = = \delta_\alpha^3 f_h^{n+1},$$

$$\Lambda_{\alpha,h} = \frac{\mathrm{T}_\alpha^{+1} a_{\alpha,h}}{h_\alpha^2}(\mathrm{T}_\alpha^{+1} - E) - \frac{a_{\alpha,h}}{h_\alpha^2}(E - \mathrm{T}_\alpha^{-1}), \alpha = \overline{1,3}. \qquad (11)$$

Схема (11) условно устойчива при $\max_\alpha \sup_{G_h} r_{\alpha,h} \le \le \frac{1}{2(1-\gamma)}$, $\forall \gamma \in [0, 0{,}5) \cup (0{,}5, 1]$,

т.е.

$$\left\| U^{n+1} \right\|_{1_p(G_h)} \le C_1 \|\varphi\|_{1_p(G_h)} + C_2 \sup_{0\le s\le n+1} \left\| f^s \right\|_{1_p(G_h)},$$

$$C_1, C_2 - const. \qquad (12)$$

При $p = \infty$ схема устойчива в норме **C**, а при $\gamma = 0{,}5$ и $\gamma = 1$ абсолютно устойчива соответственно в λ_2 и λ_p для $\forall p$.

Во многих случаях удается доказать устойчивость в пространстве λ_p для широкого класса двухслойных схем, соответствующих линейным и изредка нелинейным задачам математической физики с переменными коэффициентами. В частности, метод исследования устойчивости в λ_p применен для двумерных нелинейных разностных задач теплопроводности и экологии и доказана их устойчивость.

Из множества нелинейных задач математической физики наиболее интересным оказалось исследование устойчивости в λ_p разностных схем для системы нелинейных трехмерных параболических уравнений относительно вектор-функции $U = (U_1, U_2, U_3)$ в области $Q = (0,T] \times G$:

[18] ДАН РК. 1994. № 3; Сиб. журн. вычисл. математики. 2002. Т. 5, № 3; Сиб. журн. вычисл. математики. 2003. Т. 6, № 1; Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. Т. 8, № 4.

$$\frac{U_{k,h}^{n+1}-U_{k,h}^{n}}{\tau}-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\mu}{h_\alpha^2}\left[\mathrm{T}_\alpha^{+1}-2E+\mathrm{T}_\alpha^{-1}\right]U_{k,h}^{n+1}+$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{U_{\alpha,h}^{n}}{2h_\alpha}\left[\mathrm{T}_\alpha^{+1}-\mathrm{T}_\alpha^{-1}\right]U_{k,h}^{n+1}=f_{k,h}^{n+1},\ \ k=\overline{1,3}. \quad (13)$$

Для нее изучены некоторые (явная, расщепления и т.д.) разностные задачи. В том числе неявная разностная схема:

$$\frac{U_{k,h}^{n+1}-U_{k,h}^{n}}{\tau}-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\mu}{h_\alpha^2}\left[\mathrm{T}_\alpha^{+1}-2E+\mathrm{T}_\alpha^{-1}\right]U_{k,h}^{n+1}+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{U_{\alpha,h}^{n}}{2h_\alpha}\left[\mathrm{T}_\alpha^{+1}-\mathrm{T}_\alpha^{-1}\right]U_{k,h}^{n+1}=f_{k,h}^{n+1},\ \ k=\overline{1,3}. \quad (14)$$

Доказано, что схема устойчива, т.е.

$$\left\|U_k^{\,n+1}\right\|_{l_p(G_h)}\le\left\|\varphi_k\right\|_{l_p(G_h)}+T\left\|f_k\right\|_{l_\infty(G^\tau;l_p(G_h))},$$

$$1\le p\le\infty;\quad k=\overline{1,3}$$

при следующем необычном условии между шагами сетки h_α, функциями $\varphi_{\alpha,h}$, $f_{\alpha,h}^{s}$ и интервалом времени T:

$$h_\alpha\le\frac{2\mu}{\left\|\varphi_\alpha\right\|_{C(G_h)}+T\left\|f_\alpha\right\|_{C(Q_h^\tau)}}. \quad (15)$$

4. Нелинейное и линеаризованное уравнения Больцмана. Одним из основных уравнений математической физики является нелинейное уравнение Больцмана со степенным потенциалом межмолекулярного взаимодействия:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(v,grad f)=\mathrm{J}(f)-f\ \mathrm{S}(f)\equiv\mathrm{B}(f,f), \quad (16)$$

где

$$\mathrm{J}(f)=\int_{V_3}\int_{\Sigma}f'\,f_1'K(\theta,W)d\sigma dv_1,$$

$$\mathrm{S}(f)=\int_{V_3}\int_{\Sigma}f_1\,K(\theta,W)d\sigma dv_1,$$

$$K(\theta,W)=|W|^q\,\Lambda(\theta),q=(n-5)/(n-1);$$

$$f=f(t,x,v),\quad f_1=f(t,x,v_1),\quad f'=f(t,x,v'),$$

$f_1'=f(t,x,v_1')$ – функции распределения молекул, соответственно имеющих скорости v,v_1,v' и v_1'; v,v_1 – векторы скорости двух сталкивающихся молекул до столкновения; а v',v_1' – векторы скорости после столкновения; $W=v-v_1$ – вектор относительной скорости; $v\in V_3=\{-\infty<v_\alpha<\infty,$ $\alpha=\overline{1,3}\}$. Скорости молекул после столкновений связаны с соответствующими скоростями до него посредством обычных динамических соотношений: $v'=v+\beta(\beta,W)$, $v'_1=v_1-\beta(\beta,W)$, где β – единичный вектор в направлении рассеяния молекул: $\beta=(\sin\theta\cos\varepsilon,\sin\theta\sin\varepsilon,\cos\theta)$; $(\theta,\varepsilon)\in\Sigma=$ $=\{0\le\theta\le\pi;0\le\varepsilon\le2\pi\}$.

Нелинейное уравнение Больцмана (16), опубликованное 133 лет тому назад, имеет богатую историю. Оно до сих пор остается основой кинетической теории газов, успешно применяется для решения задач динамики плазмы, разреженных газов, нейтронов в реакторах, лучистой энергии в атмосфере. Нелинейному уравнению Больцмана посвящено много работ, выполненных на различных уровнях математической строгости. Еще в 1983 году авторы обзора[19] писали: "... Вот уже свыше 110 лет это уравнение привлекает внимание исследователей, но лишь в последние годы была доказана *разрешимость в целом* пространственно-неоднородной задачи в случае малого отклонения состояния газа от положения равновесия – более общие результаты не получены и по сей день...".

Здесь вкратце расскажем о результатах, полученных казахстанскими учеными.

В работе А. Ш. Акыш[20] изучена задача Коши для нелинейного уравнения Больцмана (16) при $n=\infty$ или $K(\theta,W)=0,25\chi^2|W|\sin(2\theta)$, т.е. для молекул – твердых шаров радиуса χ в области $Q=[0,T]\times G\times V_3$

$$(t\in[0,T],T<\infty;$$

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in G\equiv\{0\le x_\alpha\le1,\alpha=\overline{1,3}\};$$

$$v=(v_1,v_2,v_3)\in V_3\equiv\{-\infty\le v_\alpha\le\infty,\alpha=\overline{1,3}\})$$

относительно функции распределения $f=f(t,x,v)$ с начальным и периодическим граничным условиями

[19] Неравновесные явления уравнения Больцмана / Под ред. Дж. Л. Либовица, Е. У. Монтролла. М.: Мир, 1986.

[20] О нелинейном уравнении Больцмана // Математический журнал. Алматы, 2002. Т. 2, №1.

$$f(t,x,v)|_{t=0} = \varphi(x,v);$$

$$f(t,x,v)|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = f(t,x,v)|_{\Gamma_{1x_\alpha}}, \alpha = \overline{1,3}, \quad (17)$$

где $\Gamma_{\rho x_\alpha}$ – грань куба G.

Построена схема метода расщепления, соответствующая задаче (16), (17),

$$\frac{f^{n+1/5} - f^n}{\tau} = -f^{n+1/5}\mathrm{S}\,(f^{n+1/5});$$

$$\frac{f^{n+2/5} - f^{n+1/5}}{\tau} = \mathrm{J}(f^{n+1/5}), \quad (18)$$

$$\frac{f^{n+(\alpha+2)/5} - f^{n+(\alpha+1)/5}}{\tau} + v_\alpha \frac{\partial f^{n+(\alpha+2)/5}}{\partial x_\alpha} = 0,$$

$$\alpha = \overline{1,3}. \quad (19)$$

При помощи метода Т. Карлемана для преобразования интеграла столкновений, установлена ключевая оценка

$$\left\| f^{n+1} \right\|_{C(G\times V_3)} = \left\|\varphi(x,v)\right\|_{C(G\times V_3)} + TK,$$

$$K - const \quad (20)$$

решения задачи (18), (19) в классе положительных непрерывных функций. На ее основе доказано существование единственного положительного непрерывного по совокупности переменных (t,x,v) решения в целом по времени.

Известно[21], что Дж. Уленбек, положив

$$f(t,x,v) = f_0(\alpha\,|v|)(1+\varphi(t,x,v))$$

в уравнении (16) относительно малых возмущений $\varphi(t,x,v)$, получает уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (v, grad\varphi) = \mathbf{L}\varphi + \mathbf{B}(\varphi,\varphi), \quad (21)$$

где L – линеаризованный оператор, $f_0(\alpha\,|v|) =$ $= (\alpha^2/2\pi)^{\frac{3}{2}} \exp(-\alpha^2 |v|^2/2)$ – максвелловское распределение. И он же указал, что в случае максвелловских молекул, т.е. когда n=5, спектр линеаризованного оператора $\mathbf{L}$ дискретный, а собственными функциями являются $S_n^{(\lambda+1/2)}(|v|^2)$ – присоединенные полиномы Лагерра (их называют также полиномами Сонина) и $Y_\lambda^m(\theta,\psi)$ – сферические функции, где $|v|$, θ, ψ – сферические координаты в пространстве скоростей. Пренебрегая в (21) квадратичными членами по $\varphi(t,x,v)$, получает линеаризованное уравнение Больцмана, которое в области $Q = (0,T]\times G\times V_3$ дополняется следующим начальным и граничным условиями:

$$\varphi(0,x,v) = \varphi_0(x,v),$$

$$\varphi(t,x,v)|_{\partial G} = 0, \quad (v,n) \le 0, \quad (22)$$

где G – ограниченная область из R_3 с границей ∂G. В пространстве скоростей разложение $\varphi(t,x,|v|,\theta,\psi)$ и начальной функции $\varphi_0(x,|v|,\theta,\psi)$ в ряд Фурье по системе функций

$$\left\{S_n^{(\lambda+1/2)}(|v|^2)Y_\lambda^m(\theta,\psi)\right\}$$

дает бесконечную систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно коэффициентов Фурье и, урезая ее на N-м шаге, как в методе сферических гармоник, получает замкнутую систему моментных уравнений (СМУ) с начально-граничными условиями.

При изучении СМУ возникают следующие взаимосвязанные вопросы: будет ли таким образом полученная задача корректной и сходится ли решение начально-краевой или начальной задачи для моментных уравнений Больцмана к решению соответствующих задач для самого уравнения Больцмана?

На эти вопросы получены утвердительные ответы в работах А. С. Сакабекова[22], а именно предложены два способа обрыва бесконечной системы уравнений и соответственно два способа аппроксимации граничного условия (22). Доказаны корректность полученных задач и сходимость решения начально-краевой задачи для системы моментных уравнений Больцмана к решению соответствующей задачи для линеаризованного и нелинейного уравнений Больцмана. Кроме того, доказано существование глобального решения начально-краевой задачи для уравнения Больцмана в пространстве $C([0,T];L_1(G\times V_3))$ при некоторых ограничениях на начальную функцию, вытекающих из законов сохранения массы,

[21] Лекции по статистической механике. М.: Мир, 1965.

[22] Сиб. матем. журнал. 1992. Т. 33, № 1; Матем. сборник. 1992. Т. 183, № 9; Сиб. матем. журнал. 1993. Т. 34, № 1; Математический журнал. Алматы, 2002. Т. 2, № 3; там же. 2004. Т. 4, №4.

импульса и энергии, а также Н-теоремы Больцмана. Существование и единственность локального по времени решения начально-краевой задачи для неоднородной нелинейной трехмерной СМУ доказаны в пространстве функций $C([0,T];L_2(G\times V_3))$; доказана разрешимость в целом начально-краевой задачи для одномерной нелинейной СМУ во 2-м и 3-м приближениях в пространстве функций $C([0,T];L_2[-a,a])$, если плотность распределения газа неотрицательна. В работах А. Сакабекова и его учеников[23] доказана слабая сходимость решений начально-краевой задачи для неоднородной СМУ к решению соответствующей начально-краевой задачи для линеаризованного неоднородного уравнения Больцмана, из которой вытекает существование единственного слабого решения начально-краевой задачи для линеаризованного неоднородного уравнения Больцмана в пространстве функций $C([0,T];L_2(G\times V_3, f_0^{1/2}))$. Изучена краевая задача для стационарной одномерной СМУ, которая представляет собой вырожденную эллиптическую систему уравнений 1-го порядка. Доказано существование единственного слабого решения краевой задачи для стационарной одномерной СМУ в пространстве функций $L_2[-a,a]$. Сформулирована краевая задача для стационарного линеаризованного уравнения Больцмана в случае переноса и рассеяния электронов в слабоионизованном газе под действием внешней электромагнитной силы при однородных граничных условиях. Внешняя сила (электромагнитная) входит в уравнение в виде коэффициента, зависящего как от пространственных координат, так и от волнового вектора. Дано обоснование вариационного принципа в случае конечного радиуса действия межчастичного потенциала взаимодействия и построен квадратичный функционал, для которого стационарное линеаризованное уравнение Больцмана является уравнением Эйлера.

5. Метод дискретных ординат. Как известно, в работах С. Чандрасекара, Г. И. Марчука, Б. Дэвисона, В. С. Владимирова метод дискретных ординат был доведен до большого совершенства в теории излучения и переноса нейтронов. Встречающиеся там интегралы рассеяния (см. уравнение (1)) в общем случае являются одно-двукратными и имеют простой вид, допускающий прямое применение соответственно квадратурно-кубатурных формул. Трудности при решении нелинейного уравнения являются следствием того, что в уравнении Больцмана (16) имеется пятикратный интеграл столкновений и содержит довольно сложные квадратуры, распространение метода дискретных ординат на него – задача трудная. В нелинейном уравнении Больцмана ограничиться обычной сеткой дискретных ординат в пространстве скоростей невозможно. Это следует из того, что частицы, которые имели скорость v (на сетке) перед столкновением, после него приобретут скорость v', значение которой не обязательно находится на сетке. Чтобы преодолеть это затруднение, необходим сложный метод интерполяции в пространстве скоростей. Интерполяция требует особого выбора сетки точек, на которых базируются вычисления. Выбор сеток, поскольку число точек в них ограничено, является очень тонкой процедурой.

Поэтому предпочтение дается дискретной модели с квадратичной нелинейностью, как и у исходного кинетического уравнения. Многие из этих моделей обладают основными содержательными свойствами, такими, как законы сохранения массы, импульса, энергии и Н-теорема, присущими для нелинейного уравнения Больцмана. Однако эти модели не были получены вследствие применения кубатурных формул для вычисления интеграла столкновений, а в основном выведены на физическом уровне строгости в результате локализации некоторых параметров, характеризующих газ, рассматриваемый в некотором объеме. Поэтому поставить вопрос о близости их решений к решению уравнения Больцмана в математическом смысле нельзя, так как эти модели не являются следствием аппроксимации самого уравнения Больцмана.

Здесь под методом дискретных ординат для нелинейного уравнения Больцмана подразумевается метод, возникающий в результате непосредственного применения квадратурных (кубатурных) формул для вычисления интеграла столкновений. В связи с этим еще в 70-е годы У. М. Султангазин поставил вопрос: “*Нельзя ли*

[23] Вестник КазНТУ. 1995. № 3; там же. 2003. № 3; Изв. АН РК. Сер. физ.-мат. 2003. № 3; там же. 1997. № 6; Вестник КазГУ. Сер. физ. 1998. № 3.

получить такие нелинейные модели методом дискретных ординат, привлекая кубатурные формулы, введенные С. Л. Соболевым?".

На этот вопрос в работах У. М. Султангазина, А. Ш. Акишева[24] получен частично положительный ответ в предположении, что изучаемый газ состоит из молекул, скорость которых изменяется на конечном интервале. Переходя от сингулярной области в пространстве скоростей в инвариантную и используя кубатурные формулы, инвариантные относительно группы преобразований, введенных С. Л. Соболевым

$$\int_{\Omega} \rho(v) f(v) dv \cong \sum_{k=1}^{N} c_k f(v^{(k)}),$$

точной для многочленов степени не выше $n<N$, где $c_k, v^{(k)}$ – соответственно коэффициенты и узлы кубатуры, непосредственно из нелинейного уравнения Больцмана (17) для молекул – твердых шаров выведены аппроксимирующие его нелинейные системы уравнений

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + (\omega^{(k)}, grad\ f_k) \quad \sum_{1 \neq k}\!\!=\!\sum_{i \neq 1 = j} \sum_{i+1} \sigma_{k1}^{ij} (f_i f_j - f_k f_1),$$

$$k = \overline{1, N}. \tag{23}$$

Она названа системой метода дискретных ординат для нелинейного уравнения Больцмана, так как их находили, применяя простейшие инвариантные кубатурные формулы. Причем в случаях N=6 и N=8 они были почти эквивалентны известным системам дискретных моделей Бродуэлла. Например, система метода дискретных ординат (23) при N=6

$$\frac{\partial f_{2k-1}}{\partial t} + c\frac{\partial f_{2k-1}}{\partial x_k} = \frac{4cS}{15} \sum_{m=1}^{3} (1 - 3\delta_k^m) f_{2m-1} f_{2m} \equiv F_{2k-1},$$

$$\frac{\partial f_{2k}}{\partial t} - c\frac{\partial f_{2k}}{\partial x_k} = F_{2k} \equiv F_{2k-1}$$

отличается от шестискоростной модели Бродуэлла постоянным множителем $\frac{2}{5}$.

6. Дискретные модели нелинейного уравнения Больцмана. В настоящее время изучается теория систем дифференциальных уравнений, называемых дискретными моделями нелинейного уравнения Больцмана. Среди них широко распространенными являются дискретные модели Карлемана, Бродуэлла, Годунова–Султангазина. Дискретные нелинейные модели уравнения Больцмана представляют большой интерес в кинетической теории газов по следующим причинам: во-первых, дискретные модели проще, чем само уравнение Больцмана; во-вторых, для дискретной модели выполняется закон сохранения массы и Н-теорема Больцмана; в-третьих, дискретными моделями описываются микрофизические процессы, происходящие в облаках, в которых одновременно присутствуют все три фазы воды (водяной пар, капли, ледяные частицы), т.е. дискретные модели уравнения Больцмана имеют конкретные приложения. Видимо, поэтому математическая теория дискретной модели привлекает внимание все большего числа математиков из различных стран мира. С 1986 г. через каждые два года в разных странах проводятся международные конференции, посвященные математической теории дискретных моделей уравнения Больцмана. По предложению международного оргкомитета IV конференцию по дискретной модели уравнения Больцмана организовал академик У. М. Султангазин в 1992 г. в Алматы. Изучение и построение дискретных моделей уравнения Больцмана в Казахстане начались с работы С.К. Годунова и У. М. Султангазина[25]. В монографии У. М. Султангазина[26] на дискретных моделях показана связь между кинетическими уравнениями Больцмана и уравнениями гидродинамики. Доказана теорема о существовании и единственности глобального решения задачи Коши для дискретной модели в случае пространственно однородного газа и изучено асимптотическое поведение решения при $t \to \infty$. Доказана локальная теорема о существовании и единственности решения начальной задачи в случае малых отклонений начальных функций от абсолютно равновесных максвелловских распределений и дифференцируемости начальных данных. Для модели Годунова–Султангазина получена теорема о глобальном решении задачи Коши. Дано математическое обоснование метода расщепления

[24] Метод дискретных ординат для нелинейного уравнения Больцмана. Отчет о НИР (заключит.) КазгосИНТИ; № гр. 0197РК00782. Алматы, 1997. 31 с.; Докл. МН-АН РК. 1998. № 2.

[25] Успехи матем. наук. 1971. Т. 36, № 3(159). С. 3-51.

[26] Дискретные нелинейные модели уравнения Больцмана. Алма-Ата: Наука, 1985.

применительно к кинетическим уравнениям. Изучена структура ударного фронта на кинетической модели и соответствующей модели уравнения Навье–Стокса, при этом толщина структуры ударного фронта оказалась существенно разной.

Отметим, что ускоренный перевод этого труда на английский язык[27] свидетельствует об актуальности и значимости проведенных там исследований для мирового математического сообщества.

В дальнейшем по этим монографиям У. М. Султангазина определялись темы данного научного направления в Казахстане.

Некоторые результаты по дискретным моделям, полученные У. М. Султангазиным совместно с учениками Н. С. Сахановым и Б. Ю. Дюсембаевым, изложены в его книгах.

А впоследствии теория модели Годунова–Султангазина была развита в работах T. Nishida, M. Mimura и M. G. Crandall, L. Tartar. Тартар доказал теорему существования решения в целом в пространстве L^1 при условии малости нормы $\|f_0\|_{L^1}$.

В работах У. М. Султангазина, А. С. Сакабекова[28] и в монографии А. С. Сакабекова[29] доказаны существование и единственность локального по времени решения начальных и начально-краевых задач для трехмерной дискретной модели в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых в квадрате по пространственным переменным. Изучены начально-краевые задачи для одномерной модели Бродуэлла и одномерных дискретных моделей уравнения Больцмана. Доказано существование глобального по времени решения начально-краевых задач для одномерной модели Бродуэлла и дискретных моделей уравнения Больцмана в пространстве функций $C([0,T];L^1 \ln L^1)$, (0<T – любое число), если начальные и граничные функции удовлетворяют ограничениям, вытекающим из закона сохранения массы и Н-теоремы Больцмана.

Существование положительных решений двухскоростной модели Карлемана показано Л. В. Овсянниковым, а доказательство глобальной теоремы существования и единственности ее методом расщепления дано в работе R. Temam.

А. Ш. Акишев и А. У. Султангазин[30] установили новые свойства обобщенной модели Карлемана и доказали глобальную теорему существования и единственности для трехмерных нелинейных систем уравнений Карлемана, исходя из самой системы, методом априорных оценок в соболевском пространстве $W_p^k, \forall p,k$.

В работе[31] А. Ш. Акыш рассматривает газ, молекулы которого могут обладать N различными вектор-скоростями $V_k=(V_k^1,V_k^2,V_k^3)$, $k=\overline{1,N}$, взаимно меняющимися при столкновениях, и для него записывает систему N нелинейных уравнений относительно плотности молекулы U_k, $k=\overline{1,N}$ в виде

$$\frac{\partial U_k}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{3}V_k^\alpha\frac{\partial U_k}{\partial x_\alpha}=\sigma\sum_{m=1}^{N}(U_m^2-U_k^2),\qquad k=\overline{1,N} \quad (24)$$

с начальными и периодическими граничными условиями в области $Q=(0,\infty)\times G$

$$U_k(0,x)=\varphi_k(x);\ U_k|_{\Gamma_{0x_\alpha}}=U_k|_{\Gamma_{1x_\alpha}},$$
$$k=\overline{1,N},\ \alpha=\overline{1,3}, \quad (25)$$

где G – куб, $\Gamma_{\rho x_\alpha}$ – грань куба, σ – сечение столкновения, $t\in(0,\infty)$. И систему (24) также называют дискретной моделью Карлемана, так как в частных случаях N=2,3 из нее следуют соответственно общеизвестные двух-, трехскоростные модели Карлемана для уравнения Больцмана. Для задачи (24), (25) доказана устойчивость неявной разностной схемы на всем промежутке времени $t\in(0,\infty)$ в пространстве λ_p, т.е.

$$\left\|U_k^{n+1}\right\|_{1_p(G_h)}\le\sum_{k=1}^{N}\left\|\varphi_k\right\|_{1_p(G_h)},$$
$$k=\overline{1,N},\quad 1<p\le\infty.1.$$

---

[27] *Sultangazin U. M.* Discrete nonlinear models of Boltzmann equation. Moscow, 1987.

[28] Изв. АН РК. Сер. физ.-мат. 1995. № 1; там же. 2001. № 6; ДАН РК. 1997. № 5.

[28] Начально-краевые задачи для системы моментных уравнений Больцмана. Алматы, 2002.

[30] Вестн. АН КазССР. 1991. № 11.

[31] Сиб. журн. вычисл. математики. 2002. Т. 5, №3.

В работах А. Ш. Акишева[32] разработана техника расщепления нелинейных операторов системы метода дискретных ординат (23) (в частности, модели Бродуэлла для уравнения Больцмана); построены априорные оценки в пространстве $L_p, \forall p$ и показана сходимость метода расщепления в классе положительных решений.

В работах М. И. Рахимбердиева, М. Цай изучена структура фазового портрета дискретной модели уравнения Больцмана в пространственно однородном случае, а именно дано описание множества особых точек и проведена их классификация с точки зрения устойчивости. Определены области притяжения и расположение относительно инвариантных гиперплоскостей. В зависимости от параметров системы получено необходимое и достаточное условие существования линейных первых интегралов. Доказано, что положение равновесия системы состоит из двух несвязных множеств, одно из которых является аттрактором системы, другое – репеллером.

Н. А. Нурлыбаевым построены численные алгоритмы прямого статистического моделирования физико-химической кинетики разряженного газа – метода случайных весовых множителей. Разработан новый класс весовых схем прямого моделирования Монте-Карло с весовыми множителями по скоростным переменным для решения задач динамики разреженных газов, позволяющий рассчитывать высокоэнергичные хвосты функции распределения. С использованием свойств дельта-функции получена некоторая N-скоростная модель для уравнения Больцмана.

С 1975 по 1995 год под руководством академика У. М. Султангазина его учеником В. П. Шерышевым выполнялись исследования по математическому моделированию явлений теплопереноса. Исследовались краевые задачи теплопроводности с неклассическими граничными условиями, содержащими производную по времени. С помощью таких краевых задач описываются процессы теплопереноса в полупроводниковых структурах интегральных схем при их изготовлении и эксплуатации, в металлах при индукционном нагреве и высокочастотной наплавке, в элементах конструкций различных термопреобразователей. С 1981 по 1988 год разрабатывались численные алгоритмы решения прямых и обратных задач теплопроводности с производной по времени в граничном условии. С 1989 по 1993 год академиком У. М. Султангазиным, член-корр. АН Украины Ю. М. Мацевитым и СНС В. П. Шерышевым[33] в рамках концепции сосредоточенной емкости разработаны иерархические модели процессов теплопереноса и эффективные методы гибридных и параллельных вычислений. Для решения обратных задач теплопроводности предложен метод теплофизического сглаживания измеренных температур. В 1993–1994 гг. на основе концепции сосредоточенной емкости разработана новая информационная технология теплофизических исследований, которая явилась теоретической базой создаваемой в Институте металлургии НАН РК установки для определения теплофизических характеристик твердых и сыпучих материалов и серии приборов для измерения локальных тепловых потоков.

Настоящий обзор[34] охватывает неполный перечень результатов научной школы, созданной Умирзаком Махмутовичем Султангазиным, – только по одному научному направлению в его многогранной деятельности. В основном отмечены работы только тех учеников, которые продолжают вносить вклад в данное направление науки. Многие из учеников вынуждены были отказаться от научной деятельности в связи с обстоятельствами.

---

[32] Докл. НАН РК. 1993. № 4; Журн. вычисл. матем. и мат. физики. РАН. 1997. Т. 37, № 3.

[33] Сосредоточенная емкость в задачах теплофизики и микроэлектроники. Киев, 1992.

[34] Резюме некоторых авторов предоставлены ими самими или взяты из источника «Институт теоретической и прикладной математики 30 лет». Алматы, 1995. В сносках указаны основные работы.