М. Д. ШИНИБАЕВ, С. А. ЖАПБАРОВ, Н. М. УТЕНОВ

ОРБИТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПАССИВНО ГРАВИТИРУЮЩЕГО ТЕЛА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ СЖАТОГО СФЕРОИДА И ВНЕШНЕГО ТЕЛА

Пусть пассивно гравитирующее тело постоянной массы m совершает движение в поле тяготения сжатого сфероида постоянной массы M и внешнего тела массы m_1.

В диссертации [1] решена аналогичная задача для пассивно гравитирующего тела переменной массы в случае равенства нулю относительной скорости отбрасываемых частиц. Ее автор пользуется методом В. Г. Демина [2] и переносит начало неподвижной системы координат по оси аппликат в нижную шаровую точку. В данной статье используется тот же метод, но для верхней шаровой точки В. Г. Демина.

Поместим начало системы координат OXYZ в центре масс сфероида, а ось OZ совместим с осью вращения последнего, тогда, полагая оси OX, OY неподвижными, силовую функцию задачи можно записать следующим образом:

$$U=\frac{f(M+m)}{r}-\frac{f\left(A-C\right)}{2r^5}\cdot\left(x^2+y^2-2z^2\right)+\frac{1}{2}\nu r^2+\frac{1}{2}(\nu'-\nu)z^2, \qquad (1)$$

где $m<<M$, $A=B$, $C>A$, A, B, C – главные моменты инерции сфероида; x, y, z – координаты пассивно гравитирующего тела, а r – соответственно модуль его радиуса-вектора. Из условия $m<<M$ следует, что в (1) массой m можно пренебречь. Масса m_1 входит в параметры ν и $\nu^э$ [3], которые, по Хиллу, выбираются так, чтобы движения перигея и узла орбиты соответствовали наблюдаемому движению.

В выражении (1) первое слагаемое характеризует поле тяготения сферической части сфероида, второе – то, что осталось от сферы, а остальные – члены поля тяготения внешнего тела.

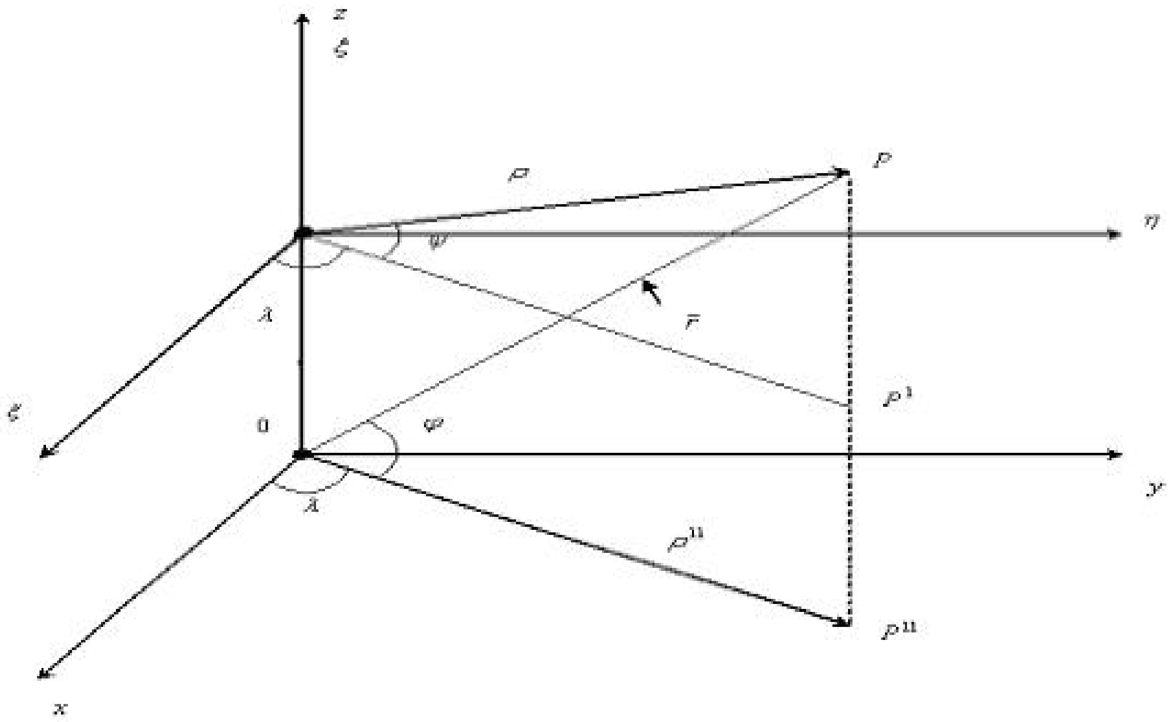
Выполним замену переменных В. Г. Демина (см. рисунок):

$$x=\xi,\ y\quad\eta,\ \ z-z_c\quad\zeta,\ z_c\approx\pm209{,}9\ \text{км} \qquad (2)$$

и перейдем к сферическим координатам

$$\xi=\rho\cos\psi\cos\lambda,\ \ \eta=\rho\cos\psi\cos\lambda,\ \ \zeta=\rho\sin\psi, \qquad (3)$$

тогда после сохранения величин порядка I_2 в разложениях (1) в степенной ряд относительно $\left(\frac{z_c}{r_0}\right)$, где r_0 – средний экваториальный радиус Земли, получим



$$U = \frac{\mu}{\rho} + \frac{fMz_c}{\rho^2}\sin\psi + \frac{1}{2}\nu\rho^2 + \frac{1}{2}\left(\nu^1 - \nu\right)\rho^2\sin^2\psi\,, \quad (4)$$

где

$$\mu \approx fM, \qquad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Кинетическая энергия пассивно гравитирующего тела в сферических координатах В. Г. Демина имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho\dot{\psi}^2 + \rho^2\dot{\lambda}^2\cos^2\psi\right). \qquad (5)$$

Составим функцию Гамильтона

$$H = T - U = \frac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho\dot{\psi}^2 + \rho^2\dot{\lambda}^2\cos^2\psi\right) - \frac{\mu}{\rho} -$$

$$-\frac{fMz_c}{\rho^2}\sin\psi - \frac{1}{2}\nu\rho^2 - \frac{1}{2}\left(\nu^1 - \nu\right)\rho^2\sin^2\psi. \quad (6)$$

Введем импульсы

$$P_\rho = \frac{\partial T}{\partial\dot{\rho}} = \dot{\rho}, \quad P_\psi = \frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = \rho^2\dot{\psi},$$

$$P_\lambda = \frac{\partial T}{\partial\dot{\lambda}} = \rho^2\dot{\lambda}\cos^2\psi\,,$$

тогда функция Гамильтона примет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(P_\rho^2 + \frac{P_\psi^2}{\rho^2} + \frac{P_\lambda^2}{\rho^2\cos^2\psi}\right) - \frac{\mu}{\rho} - \frac{fMz_c}{\rho^2}\sin\psi -$$

$$-\frac{1}{2}\nu\rho^2 - \frac{1}{2}\left(\nu^1 - \nu\right)\rho^2\sin^2\psi\,. \qquad (7)$$

Зависимость между двумя сферическими системами координат определена уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2 - 2\rho z_c\sin\psi + z_c^2} \\ tg\varphi &= tg\psi - \frac{z_c}{\rho}\sec\psi \end{aligned}\right\}, \qquad (8)$$

$$tg\varphi = tg\psi - \frac{z_c}{\rho^{11}}, \quad \rho^{11} = \rho\cos\psi,$$

$$PP^1 = \xi,\ z = z_c + \xi. \qquad (9)$$

Рассмотрим случай малого наклона орбит пассивно гравитирующего тела Р к основной плоскости ОХУ:

$$\xi = \rho\sin\psi \neq 0,\ \xi^2 = \rho^2\sin^2\psi \approx 0,\ \nu^1 = -2\nu \neq 0,$$

$$-\frac{1}{2}\left(\nu^1 - \nu\right)\rho^2\sin^2\psi = \frac{3}{2}\rho^2\sin^2\psi\cdot\vartheta \approx 0.$$

В силу выписанных соотношений усеченная функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(P_s^2 + \frac{1}{\rho^2}P_\psi^2 + \frac{P_\lambda^2}{\rho^2\cos^2\psi}\right) + \frac{\mu}{\rho} +$$

$$+\frac{fMz_c}{\rho^2}\sin\psi - \frac{1}{2}\nu\rho^2. \qquad (10)$$

Функция Гамильтона явно от времени не зависит, поэтому уравнение Гамильтона–Якоби можно записать так:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\psi}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2\cos^2\psi}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda}\right)^2\right] -$$

$$-\frac{\mu}{\rho} - \frac{fMz_c}{\rho^2}\sin\psi - \frac{1}{2}\vartheta\rho^2 = h_1, \qquad (11)$$

где h_1 – постоянная величина, w – искомая производящая функция.

Канонические уравнения записываются в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_\rho}, && \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_\psi}, && \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_\lambda}, \\ &\frac{dP_\rho}{dt} = \frac{\partial H}{\partial\rho}, && \frac{dP_\psi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial\psi}, && \frac{dP_\lambda}{dt} = \frac{\partial H}{\partial\lambda}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

В соответствии с общей теорией решения канонических уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial h_1} = t + \beta_1, && \frac{\partial W}{\partial h_2} = \beta_2, && \frac{\partial W}{\partial h_3} = \beta_3, \\ &\frac{\partial W}{\partial\rho} = P_\rho, && \frac{\partial W}{\partial\psi} = P_\psi, && \frac{\partial W}{\partial\lambda} = P_\lambda. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Применим метод разделения переменных, полагая

$$W = W_1(\rho) + W_2(\psi) + W_3(\lambda), \qquad (14)$$

тогда уравнение (11) будет развернуто в виде

$$\left(\frac{dW_1}{d\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{dW_2}{d\psi}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2\cos^2\psi}\left(\frac{dW_3}{d\lambda}\right)^2 -$$

$$-\frac{2\mu}{\rho} - \frac{2fMz_c}{\rho^2}\sin\psi - \nu\rho^2 - 2h_1 = 0. \qquad (15)$$

Умножим выражение (15) на ρ^2, тогда будем иметь

$$\rho^2\left(\frac{dW_1}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{dW_1}{d\psi}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2\psi}\left(\frac{dW_3}{d\lambda}\right)^2 -$$

$$-2\mu\rho - 2fMz_c\sin\psi - \nu\rho^4 - 2h_1\rho^2 = 0. \qquad (16)$$

Выпишем из (16):

$$\rho^2\left(\frac{dW_1}{d\rho}\right)^2 - \nu\rho^4 - 2\mu\rho - 2h_1\rho^2 = h_2^2, \quad (17)$$

$$\left(\frac{dW_3}{d\lambda}\right)^2 = h_2^2, \quad (18)$$

$$\left(\frac{dW}{d\psi}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2\psi}h_3^2 - 2\,fMz_c\sin\psi = -h_2^2. \quad (19)$$

Теперь, если сложим (17) и (19) в силу (18), то снова найдем (16), т.е. переменные разделились без проблем.

Найдем w_1, w_2 и w_3 из (17), (18), (19) следующими квадратурами:

$$W_3 = \int h_3 d\lambda = h_3\lambda, \quad (20)$$

$$W_1 = \int \frac{1}{\rho}\sqrt{\vartheta\rho^4 + 2h_1\rho^2 + 2\mu\rho + h_2^2}\,d\rho, \quad (21)$$

$$W_2 = \int \frac{1}{\cos\psi}\times \quad (22)$$

$$\times\sqrt{-2\,fMz_c\sin^3\psi + h_2^2\sin^2\psi + 2\,fMz_c\sin\psi - h_2^2 - h_3^2}\,d\psi.$$

Подставим (20)–(22) в (14), найдем W в квадратурах с точностью до аддитивной постоянной:

$$W = \int \frac{1}{\rho}\sqrt{\nu\rho^4 + 2h_1\rho^2 + 2\mu\rho + h_2^2}\,d\rho +$$

$$+\int \frac{1}{\cos\psi}\times$$

$$\times\sqrt{-2\,fMz_c\sin^3\psi + h_2^2\sin^2\psi + 2\,fMz_c\sin\psi - h_2^2 - h_3^2}\,d\psi +$$

$$+h_3\lambda. \Downarrow \quad (23)$$

Выполнив из (23) частные производные в соответствии с (13), найдем решение канонических уравнений (12) в следующем виде:

$$t + \beta_1 = \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\vartheta\rho^4 + 2h_1\rho^2 + 2\mu\rho + h_2^2}}, \quad (24)$$

$$\beta_2 = h_2\int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\vartheta\rho^4 + 2h_1\rho^2 + 2\mu\rho + h_2^2}} - h_2\times \quad (25)$$

$$\times\int \frac{\cos\psi d\psi}{\sqrt{-2\,fMz_c\sin^3\psi + h_2^2\sin^2\psi + 2\,fMz_c\sin\psi - h_2^2 - h_3^2}},$$

$$\beta_3 = \lambda - h_3\times \quad (26)$$

$$\times\int \frac{d\psi}{\cos\psi\sqrt{-2\,fMz_c\sin^3\psi + h_2^2\sin^2\psi + 2\,fMz_c\sin\psi - h_2^2 - h_3^2}}$$

$$\dot{\rho} = -\int \frac{1}{\rho^2}\sqrt{\vartheta\rho^4 + 2h_1\rho^2 + 2\mu\rho + h_2^2}\,d\rho +$$

$$+\int \frac{1}{\rho}\frac{2\vartheta\rho^3 + 2h_1\rho + \mu}{\sqrt{\vartheta\rho^4 + 2h_1\rho^2 + 2\mu\rho + h_2^2}}d\rho \quad (27)$$

$$\rho^2\dot{\lambda}\cos^2\psi = h_3 \quad (28)$$

$$\rho^2\dot{\psi} = \int \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}\times \quad (29)$$

$$\times\sqrt{-2\,fMz_c\sin^3\psi + h_2^2\sin^2\psi + 2\,fMz_c\sin\psi - h_2^2 - h_3^2}\,d\psi +$$

$$+\int \frac{-3\,fMz_c\sin^2\psi + h_2^2\sin\psi + fMz_c}{\sqrt{-2\,fMz_c\sin^3\psi + h_2^2\sin^2\psi + 2\,fMz_c\sin\psi - h_2^2 - h_3^2}}d\psi.$$

Из первых трех квадратур можно вычислить сферические координаты ρ, ψ, λ пассивно гравитирующего тела, а из остальных – импульсы $\dot{\rho}$, $\rho^2\dot{\psi}$, $\rho^2\dot{\lambda}\cos^2\psi$.

Найдено новое решение поставленной задачи в квадратурах. При необходимости из этих квадратур можно найти как сферические координаты, так и квазиконические орбиты пассивно гравитирующего тела.

Выражение (28) представляют собой интеграл площадей дифференциальных уравнений движения пассивно гравитирующего тела.

Найденные решения можно использовать как промежуточную орбиту при построении точных теорий движения ИСЗ различных назначений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шинибаев М.Д.* Динамика поступательного движения пассивно гравитирующих тел постоянной и переменной масс в нецентральном поле тяготения: Дис. … д. ф.-м. н. Бишкек, 2002. 27 с.

2. *Демин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М.: Наука, 1968. 352 с.

3. *Щиголев Б.М.* О промежуточной орбите Хилла в задаче трех тел // Труды ГАИШ им. П. К. Штернберга. 1960. Т. 28. С. 91-98.

Резюме

Сфероид пен сыртқы дененің өрісіндегі пассив гравитациялық дененің орбиталық қозғалысының дифференциалдық теңдеулері қорытылып квадратураларға келтірілген. Анықталған шешімдер орталық орбита ретінде қолданылуы мүмкін.

Summary

In clause (article 3) for passive – a gravitational body in a field of gravitation of a spheroid and an external body the differential equations of orbital movement are received. Decisions of these equations in quadrates are received. The found decisions can be used as an intermediate orbit.

УДК 531.1

ЮКГУ *Поступила 10.03.06г.*