М. Ж. ЖУМАБАЕВ, К. Е. ТОГЫЗБАЕВ

МНОГОСЛОЙНЫЙ ЦИЛИНДР С НЕЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМЫМИ СЛОЯМИ

В связи с широким применением композиционных материалов в современных машиностроительных конструкциях возникает необходимость изучения процессов, происходящих на стадии получения композиционных материалов и создания конструкции из них [1–4]. При создании конструкции из композиционных материалов вопросы проектирования, оптимизации конструкции и разработка технологических процессов являются неразделимыми сторонами процесса изготовления изделия. Материал матрицы определяет важные эксплуатационные качества композиционных материалов. Материалы матрицы композиционных материалов могут быть пластическими или хрупкими [5]. Армирующие элементы могут деформироваться линейно вплоть до разрушения. Ряд волокон проявляют анизотропные свойства и могут рассматриваться как трансверсально-изотропные тела, а некоторые ведут себя как изотропные тела. Методы расчета конструкции из слоистых композиционных материалов должны быть основаны на соответствующих слоистых моделях. Использование слоистых моделей дает возможность более реально оценить напряженно-деформированное состояние конструкции. Таким образом, разработка наиболее полных и достаточно эффективных математических моделей создания материалов и конструкции, а также разработка соответствующих методов их решения являются одной из важнейших задач в создании композиционных конструкций.

Рассматривается многослойный цилиндр с внутренним r_0=a и внешним r_n=b радиусами, состоящий из N слоев. Цилиндр находится под действием внутреннего и внешнего давлений. На торцах цилиндра действуют осевые силы так, что цилиндр находится в условиях плоской деформации. Считается, что слои жестко скреплены между собой. Материалы слоев являются трансверсально-изотропными или изотропными. Ось анизотропии совпадает с осью цилиндра.

Уравнения равновесия цилиндра относительно компонент вектора перемещения для каждого слоя имеют вид [6]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{A_{22}}{A_{11}}\frac{u}{r^2}+\frac{A_{66}}{A_{11}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial_2 u}{\partial\varphi^2}+$$

$$+\frac{A_{12}+A_{66}}{A_{11}}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r\partial\varphi}-\frac{A_{22}+A_{66}}{A_{11}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}=0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}-\frac{\vartheta}{r^2}+\frac{A_{22}}{A_{66}}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2}+\frac{A_{12}+A_{66}}{A_{66}}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+$$

$$+\frac{A_{22}+A_{66}}{A_{66}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=0,$$

где $A_{11}=\frac{E_r}{1-\nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}}$, $A_{12}=\frac{E_r\nu_{r\varphi}}{1-\nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}}$, $A_{22}=\frac{E_\varphi}{1-\nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}}$,

$A_{66}=(A_{11}-A_{12})/2$.

Компоненты перемещений отыскиваются в виде тригонометрических рядов

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r)\cos n\varphi\,,\quad \vartheta=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(r)\sin n\varphi\,. \quad (2)$$

Подставляя решения (2) в уравнения (1), можно получить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов u_n, ϑ_n:

$$\frac{d^2u_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_n}{dr}-\frac{A_{22}}{A_{11}}\frac{u_n}{r^2}+\frac{A_{66}}{A_{11}}\frac{n^2u_n}{r^2}+$$

$$+\frac{A_{12}+A_{66}}{A_{11}}\frac{n}{r}\frac{d\vartheta_n}{dr}-\frac{A_{22}+A_{66}}{A_{11}}\frac{n\vartheta_n}{r^2}=0, \quad (3)$$

$$\frac{d^2\upsilon_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\vartheta_n}{dr}-\frac{\vartheta_n}{r^2}+\frac{A_{22}}{A_{66}}\frac{n^2\vartheta_n}{r^2}-$$

$$-\frac{A_{22}+A_{66}}{A_{66}}\frac{n}{r}\frac{du_n}{dr}-\frac{A_{22}+A_{66}}{A_{66}}\frac{nu_n}{r^2}=0.$$

Граничные условия

$$\sigma_r(a) = -p_a \text{ при } r = a,$$

$$\sigma_r(b) = -p_b \text{ при } r = b. \quad (4)$$

Для многослойного цилиндра, состоящего из N слоев, общее решение системы (1) имеет вид

$$\begin{cases} u = C_1 r^{\gamma} + C_2 r^{-\gamma} + (C_{11} + C_{21}\ln r + C_{31} r^{\gamma} + C_{41} r^{-\gamma}) \times \\ \times \cos\varphi + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_{kn} r^{\lambda_{kn}} \cos n\varphi, \\ \vartheta = \Bigg[-C_{11} - C_{21}(\ln r + \dfrac{A_{12}+A_{66}}{A_{22}+A_{66}}) + \\ + C_{31}\dfrac{A_{11}\gamma^2 - A_{22} - A_{66}}{A_{22}+A_{66}-\gamma(A_{12}+A_{66})} r^{\gamma} + \\ + C_{41}\dfrac{A_{11}\gamma^2 - A_{22} - A_{66}}{A_{22}+A_{66}+\gamma(A_{12}+A_{66})} r^{-\gamma} \Bigg] \sin\varphi + \\ \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_{kn} \dfrac{A_{11}\lambda_{kn}^{\ 2} - A_{22} - A_{66} n^2}{n[A_{22}+A_{66}-\lambda_{kn}(A_{12}+A_{66})]} r^{\lambda_{kn}} \sin n\varphi. \end{cases} \quad (5)$$

На основе закона Гука находятся компоненты напряжения σ_r, $\sigma_{r\varphi}$, σ_φ, σ_z. Коэффициенты C_{kn} определяются из заданных на внутренней и внешней поверхностях цилиндра граничных условий и условий контакта слоев.

В случае малой упругопластической деформаций для определения НДС цилиндра удобно использовать систему дифференциальных уравнений первого порядка и недифференциальное уравнение относительно окружной компоненты напряжения σ_φ:

$$du/dr = u_{,r} = 1/E_r^* (\sigma_r - \nu_r^* \sigma_\varphi) + \alpha^* T,$$
$$d\sigma_r/dr = (\sigma_\varphi - \sigma_r) / r - \rho\omega^2 r, \quad (6)$$
$$\sigma_\varphi = E_r^* u/r + \nu_r^* \sigma_r - E_r^* \alpha^* T.$$

В матричной форме разрешающие уравнения (6) могут быть записаны в виде

$$dY/dr = AY + F,\ Y^T = \{u, \sigma_r\},$$
$$F^T = \{(1 + \nu_r^*)\alpha^* T, -E_r^* \alpha^* T/r - \rho\omega^2 r\},$$
$$A = \begin{bmatrix} a_{11}/r & a_{12} \\ a_{21}/r^2 & a_{21}/r \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Элементы матрицы А определяются из равенств

$$a_{11} = -\nu_r^*,\ a_{12} = (1\ \ \nu_r^{*2}) / E_r^*,$$
$$a_{21} = \nu_r^* - 1,\ a_{22} = \nu_n^* - 1. \quad (8)$$

При исследовании НДС многослойных оболочек и дисков, отдельные слои которых изготовлены из линейно-деформируемых трансверсально-изотропных материалов, а другие – из нелинейно-деформируемых изотропных материалов, будут использоваться уравнения (6) с обобщенными на указанные случаи элементами a_{ij} матрицы А и компонентами вектора F. При этом должны быть использованы равенства

$$a_{11} = -\nu_{\varphi r}^*;\ \ a_{12} = (1 - \nu_{\varphi r}^* \nu_{r\varphi}^*) / E_r^*;$$
$$a_{21} = E_\varphi^*;\ a_{22} = \nu_{\varphi r}^* - 1;$$
$$F^T = \{(\alpha_r^* + \nu_{\varphi r}^* \alpha_\varphi^*)T;\ -\alpha_\varphi^* E_\varphi^* T / r - \rho\omega^2 r\},$$
$$\sigma_\varphi = E_\varphi^* u/r + \nu_{\varphi r}^* \sigma_r - \alpha_\varphi^* E_\varphi^* T \quad (9)$$

и $\sigma_z = \nu_{zr}\sigma_r + \nu_{z\varphi}\sigma_\varphi - E_r\alpha_r T$ – при плоской деформации.

Решение Y системы дифференциальных уравнений первого порядка (7) при заданных кинематических или статических условиях на радиальных поверхностях r = a, r = b может быть построено как линейная суперпозиция решений Y_i трех задач Коши (i = 1, 2, 3). При этом

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + Y_3. \quad (10)$$

Здесь Y_1 и Y_2 являются линейно независимыми решениями задачи Коши для однородной системы уравнений, соответствующей (7) при F = 0, а Y_3 – решением задачи Коши для полной системы уравнений (7) при однородных граничных условиях на левом конце (r = a) исследуемого тела. Постоянные интегрирования должны быть определены из граничных условий многослойного цилиндра.

При решении упругопластических задач предполагается, что объемная деформация ε (ε = $= (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z)/3$) линейно зависит от всестороннего давления σ ($\sigma = (\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z) / 3$) как в области упругих, так и пластических деформаций. При этом в соотношении

$$\sigma = E\ (\varepsilon - 3\alpha^* T) / (1 - 2\nu) \quad (11)$$

модуль упругости Е и коэффициент Пуассона ν являются чисто упругими характеристиками. В теории малых упругопластических деформаций полагают, что компоненты девиатора напряжений (s_r, s_φ, s_z) и девиатора деформаций (e_r, e_φ, e_z) пропорциональны и связаны зависимостями

$$e_r = \varepsilon_r - \varepsilon = \phi\ s_r = \phi\ (\sigma_r - \sigma),$$
$$e_\varphi = \varepsilon_\varphi - \varepsilon = \phi\ s_\varphi = \phi\ (\sigma_\varphi - \sigma), \quad (12)$$
$$e_z = \varepsilon_z - \varepsilon = \phi\ s_z = \phi\ (\sigma_z - \sigma).$$

В области физически линейных (упругих) деформаций коэффициент пропорциональности ϕ считается равным $\phi = (1+\nu)/E$. При нелинейных деформациях полагают, что $\phi = 3\varepsilon_i/2\sigma_i$. Здесь интенсивности деформаций ε_i и напряжений σ_i вычисляются из соотношений

$$\varepsilon_i = \{2[(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2]\}^{0,5} / 3,$$
$$\sigma_i = \{2[(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2]\}^{0,5} / 2\ . \quad (13)$$

Рассматривается двадцатислойный толстый цилиндр с чередующимися слоями алюминиевого сплава АД – 33 (h_{Al}) и боралюминия [5]. При этом толщинами слоев из сплава АД – 33 и боралюминия (h_{Bal}) и их месторасположением можно варьировать. Обсуждаются результаты вычислений для двух вариантов толщины чередующихся слоев – при h_{Al} = 0,7 мм и h_{Bal} = 0,3 мм, а также при h_{Al} = 0,3 мм, h_{Bal} = 0,7 мм. Внутренний (a = 56,8 мм) и наружный (b = 66,8 мм) радиусы цилиндра в расчетах оставались постоянными. Сравнение результатов расчета демонстрирует, что выбор толщины слоев позволяет управлять уровнем напряжений в отдельных слоях. Действительно, при одном и том же значении внутреннего давления (P_a = –52 МПа) во втором варианте, когда толщина слоев более жесткого боралюминия больше, максимальные значения кольцевых напряжений σ_φ (458 МПа) почти в два раза меньше их значений в первом (814 МПа) варианте. При этом уровни пластических деформаций в слое из алюминиевого сплава АД – 33, а также уровни остаточных напряжений в конструкции с относительно толстыми алюминиевыми слоями заметно превышают их значения во втором варианте. Действительно, во втором варианте пластически деформируются только два первых слоя из АД – 33, тогда как в первом варианте все алюминиевые слои деформированы нелинейно. Таким образом, напряженное состояние слоев составной конструкции можно регулировать в широких пределах соответствующим выбором толщины отдельных слоев.

Более того, место расположения намотки из высокомодульного боралюминия также оказывает определенное влияние на уровни и распределения реализуемых в составной конструкции напряжений. При действии внутреннего давления более рационально располагать несущие слои на периферии. Однако такой результат связан с тем, что снижение напряженности боралюминия может быть обусловлено повышением напряженности слоя из алюминиевого сплава. Кроме того, следует обратить внимание на то, что при приблизительно одинаковой общей толщине намотки из боралюминия одинаковые уровни пластических деформаций в алюминии в многослойной конструкции реализуются при более высоких значениях внутреннего давления (p_a = –52 МПа вместо p_a = –38 МПа), чем в двухслойных. Поэтому, если напряженность внутреннего слоя является ограничением при проектировании конструкции, то целесообразно использовать многослойную трубу.

Наконец, если рассматривается многослойный (двадцатислойный) тонкий диск тех же размеров и также нагруженный внутренним давлением p_a = –52 МПа, то расчетные значения напряжений оказались несколько выше. Например, при плоском напряженном состоянии кольцевые напряжения σ_φ составили 464 и 880 МПа вместо 458 и 814 МПа при плоской деформации.

Разработанные и описанные выше методы решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (6) с кусочно-переменными коэффициентами применены к многослойным конструкциям. Полученные результаты расчетов имеют важное прикладное значение. Действительно, многослойная конструкция на 30–40% эффективнее, чем двухслойная, при одинаковой толщине и при одинаковом относительном содержании слоев с различными характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Немировский Ю.В., Резников Б.С.* Прочность элементов конструкции из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1986. 165 с.

2. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Наука, 1993. 510 с.

3. *Молодцов Г.А.* и др. Формостабильные и интеллектуальные конструкции из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 2000. 351 с.

4. *Каримбаев Т.Д.* Усиленные композиционным материалом конструкции роторов // Новые технологические процессы и надежность в ГТД. Вып. 1. 2000. С. 155-179

5. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. В. В. Васильева и др. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.

6. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.

Резюме

Көп қабатты цилиндрдің кернеулігі есебін шешу алгоритмі келтірілген. Ұсынылған алгоритм қолданылып жиырма қабатты цилиндрдің кернеулі-деформациялық күйі есебі шешілген. Алынған нәтижелер талқыланған. Қалыңдығы бірдей болғанда көпқабатты цилиндрдің екіқабатты цилиндрге қарағанда тиімділігі көрсетілген.

УДК 539.3

КазАТК *Поступила 4.02.06г.*