ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А.* Синтез плоских механизмов. М.: Госиздат, 1959. 1084 с.
2. *Саткалиева М.О.* Уравнения преобразования кинематических цепей пространственного рычажного механизма V класса // Вестник МОН РК, НАН РК. 2004. № 5. С. 178-181.
3. *БронштейнИ.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1986. 544 с.
4. *Канлыбаев О.*Синтез пространственного передаточного рычажного механизма V класса с двумя входными звеньями по заданным шести положениям // Материалы международ. научной конференции, КазНТУ им. К. Сатпаева. Алматы, 2005. Т. II. С. 236-238.
5. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М., 2003. 431 с.

Резюме

V класты кеңістікті механизмнің жетекші буыны мен шығыс буынның берілген жағдайына байланысты, осы механизмнің жеті параметрлерінің синтез есебі қарастырылды. үш белгісізі бар үш теңдеуден құралған дәрежелі теңдеулер жүйесінің бір белгісізін шығару шешімі көрсетілген.

Summary

The task of synthesis of seven parameters of a spatial mechanism of V class upon set positions of input and output links is considered. The solving of excluding of unknown from a system of the power multinomials with the unknowns

УДК 621.01:531

Казахский национальный университет им. аль-Фараби. г. Алматы

Поступила 17.03.06 г.

А. В. АЛЕКСЕЕВА

(2+1)-МЕРНАЯ МОДЕЛЬ КОРТЕВЕГА ДЕ ФРИЗА И ЕЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

В 1960-х гг. было выявлено, что проблемы взаимодействия волн большой амплитуды, которые возникают в физике плазмы, нелинейной оптике, физике ферромагнетиков, имеют много общего с классической задачей о нелинейных волнах на поверхности тяжелой жидкости [1, с. 288–289]. Многие физические задачи о нелинейных волнах описываются универсальной математической моделью – уравнением Кортевега де Фриза.

Классическое уравнение Кортевега де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad (1)$$

описывает как слабые длинные гидромагнитные волны в плазме и волны на воде, так и слабо нелинейные ионно-акустические волны сжатия в плазме [2]. Несмотря на то, что структура и свойства (1+1)-*мерного* (модифицированного) уравнения Кортевега де Фриза (1) достаточно хорошо изучены (см., например, [1–5]), еще многое неизвестно о свойствах многомерных нелинейных эволюционных уравнений.

В 1970 г. Кадомцев и Петвиашвили [6] получили *двумерный вариант уравнения Кортевега де Фриза*

$$(u_{xxx} + 6u^2 + u_x + u_t)_x - u_{yy} = 0 \qquad (2)$$

для слабо длинных нелинейных волн в диспергирующих средах. В 1976 г. Како и Роулендз [7] получили уравнение (2) для двумерного распространения ионно-акустических солитонов. Далее Тапперт и Варма [8], а также Нараянамурти и Варма [9] получили уравнение (2) при изучении распространения тепловых импульсов в твердых телах. Поскольку уравнение (2) возникает в разных физических ситуациях, его вполне обоснованно можно рассматривать как *модельное* уравнение.

В 1988 г. Л. П. Нижник [10, с. 188–189] предложил *пространственную двумеризацию модифицированного уравнения Кортевега де Фриза* в виде

$$u_t = u_{xxx} + u_{yyy} + (vu)_y + (wu)_x - \frac{1}{2}(v_y + w_x)u, \qquad (3)$$

$$u_x = 3(u^2)_y, \quad w_y = 3(u^2)_x. \qquad (4)$$

Уравнение (3), (4) было найдено исходя из возможности существования для данного уравнения пары Лакса, что позволяет решить уравнение (3), (4) методом обратной задачи рассеяния.

В [11] было получено *(2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза* в виде

$$\psi_t + \psi_{xxy} + 4\psi\psi_x + V\psi_y + V_x U = 0, \qquad (5)$$

$$V_y = \psi_x\,,\;\; U_x = \psi_y\,, \tag{6}$$

в соответствии с [5, с. 10–11] в предположении возможности существования для данного уравнения билинейной формы

$$(D_y D_t + D_y^2 D_x^2)(\varphi \circ \varphi) = 0\,,$$

$$D_x^m D_t^n (F \circ G) =$$

$$= \left(\partial_x - \partial_{x'}\right)^m \left(\partial_t - \partial_{t'}\right)^n F(x,t)G(x',t')\Big|_{x'=x,t'=t}\,,$$

которая позволяет решить уравнение (5), (6) методом Хироты.

Здесь $\psi = \psi(x,y,t)$ – искомая комплекснозначная функция из пространства Шварца, т.е. непрерывна вместе с частными производными любого порядка, и при $|x| \to \infty$ убывает вместе со всеми своими частными производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$.

Для уравнения (5), (6) рассмотрим задачу Коши с *начальным условием*

$$\psi(x,y,t)\big|_{t=0} = \psi_0(x,y)\,, \tag{7}$$

где $\psi_0(x,y)$ – заданная комплекснозначная функция из пространства Шварца.

В 1965 г. Краскал и Забужский обнаружили, что уравнение Кортевега де Фриза (1) имеет точное решение – *солитон*. Под солитоном понимают уединенную волну, которая ведет себя как частица, т.е. распространяется без потерь или приобретения энергии, не изменяя формы и скорости, и «упруго» взаимодействует с себе подобными. После взаимодействия солитон сохраняет скорость и восстанавливает асимптотически свою точную первоначальную форму с возможным смещением фазы [3, с. 15]. Амплитуда и скорость солитона пропорциональны, т.е. чем выше уединенная волна, тем быстрей она бежит. Такую зависимость скорости распространения волны от ее амплитуды принято называть *нелинейностью* [12, с. 2].

Другой особенностью солитона является то, что его распространение в многомерном пространстве ограничено только *одной* пространственной координатой. Такое ограничение позволяет солитону сохранять свою амплитуду и, следовательно, скорость [12, с. 2]. Поэтому (2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза (5), (6) снабдим *граничным условием* только по одной пространственной переменной x:

$$\psi(x,y,t) \to 0 \;\text{ при }\; |x| \to \infty\,. \tag{8}$$

Таким образом, под *(2+1)-мерной моделью Кортевега де Фриза* будем понимать уравнение (5), (6) вместе с начальным (7) и граничным (8) условиями.

Теорема 1. (2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза (5), (6) можно свести к системе линейных дифференциальных уравнений вида

$$\varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi\,, \tag{9}$$

$$\varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi\,, \tag{10}$$

где $\lambda = \lambda(y,t)$,

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \overline{\psi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\psi_{xy} - 2\psi^2 - \partial_x^{-1}(\psi_y)\partial_y^{-1}(\psi_x) \\ -\overline{\psi}_{xy} - 2\overline{\psi}^2 - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y)\partial_y^{-1}(\overline{\psi}_x) & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$B = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\psi - \partial_x^{-1}(\psi_y) \\ -2i\partial_x^{-1}\overline{\psi} - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y) & i \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$\lambda_t = \lambda\lambda_y\,. \tag{14}$$

Доказательство. Действительно, условие совместности системы линейных дифференциальных уравнений (9), (10) имеет вид

$$\varphi_{xt} = \varphi_{tx}\,,$$

или

$$(U_{0t} - A_x + [U_0, A])\varphi + \lambda(-U_{0y} - B_x + [U_0, B])\varphi +$$

$$+ (\lambda_t - \lambda\lambda_y)\varphi = 0\,, \tag{15}$$

где $[A, B] = AB - BA$.

Из (15) имеем следующую систему уравнений:

$$U_{0t} - A_x + [U_0, A] = 0\,, \tag{16}$$

$$-U_{0y} - B_x + [U_0, B] = 0\,, \tag{17}$$

$$\lambda_t - \lambda\lambda_y = 0\,. \tag{18}$$

В силу (11)–(14) уравнения (17), (18) удовлетворяются тождественно, а уравнение (16) дает (2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза (5),(6). Что и требовалось доказать.

Замечание. Отметим, что при фиксированных переменных y и t, комплексный параметр λ играет роль спектрального параметра уравнения (9). Поэтому он не зависит от переменной x, т.е. $\lambda = \lambda(y,t)$. При этом, как видно из уравнения (15), он удовлетворяет условию (14).

Теорема 2. (2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза (5), (6) можно свести к системе линейных дифференциальных уравнений вида

$$\varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi, \qquad (19)$$

$$\varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi + \lambda^2 C\varphi, \qquad (20)$$

где $\lambda = \lambda(y,t)$,

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \overline{\psi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_t = \lambda\lambda_y, \qquad (21)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\psi_{xy} - 2\psi^2 - \partial_x^{-1}(\psi_y)\partial_y^{-1}(\psi_x) \\ -\overline{\psi}_{xy} - 2\overline{\psi}^2 - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y)\partial_y^{-1}(\overline{\psi}_x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad (22)$$

$$B = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\psi - \partial_x^{-1}(\psi_y) \\ -2i\partial_x^{-1}\overline{\psi} - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y) & i \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

$$C = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\psi \\ -2i\partial_x^{-1}\overline{\psi} & i \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Доказательство. Действительно, условие совместности системы линейных дифференциальных уравнений (19), (20) имеет вид

$$\varphi_{xt} = \varphi_{tx}$$

или

$$(U_{0t} - A_x + [U_0, A])\varphi - \lambda(U_{0y} + B_x + [B, U_0])\varphi -$$
$$-\lambda^2(C_x + [C, U_0])\varphi + (\lambda_t - \lambda\lambda_y)\varphi = 0, \qquad (25)$$

где $[A, B] = AB - BA$.

Из (15) имеем следующую систему уравнений:

$$U_{0t} - A_x + [U_0, A] = 0, \qquad (26)$$

$$U_{0y} + B_x + [B, U_0] = 0, \qquad (27)$$

$$C_x + [C, U_0] = 0, \qquad (28)$$

$$\lambda_t - \lambda\lambda_y = 0. \qquad (29)$$

В силу (21)–(24) уравнения (27)–(29) удовлетворяются тождественно, а уравнение (26) дает (2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза (5), (6). Что и требовалось доказать.

Теорема 3. (2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза (5), (6) можно свести к системе линейных дифференциальных уравнений вида

$$\varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi, \qquad (30)$$

$$\varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi + \lambda^2 C\varphi + \lambda^3 D\varphi, \qquad (31)$$

где $\lambda = \lambda(y,t)$,

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \overline{\psi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_t = \lambda\lambda_y, \qquad (32)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\psi_{xy} - 2\psi^2 - \partial_x^{-1}(\psi_y)\partial_y^{-1}(\psi_x) \\ -\overline{\psi}_{xy} - 2\overline{\psi}^2 - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y)\partial_y^{-1}(\overline{\psi}_x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad (33)$$

$$B = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\psi - \partial_x^{-1}(\psi_y) \\ -2i\partial_x^{-1}\overline{\psi} - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y) & i \end{pmatrix}, \qquad (34)$$

$$C = D = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\psi \\ -2i\partial_x^{-1}\overline{\psi} & i \end{pmatrix}. \qquad (35)$$

Доказательство. Действительно, условие совместности системы линейных дифференциальных уравнений (30), (31) имеет вид

$$\varphi_{xt} = \varphi_{tx},$$

или

$$(U_{0t} - A_x + [U_0, A])\varphi - \lambda(U_{0y} + B_x + [B, U_0])\varphi -$$
$$-\lambda^2(C_x + [C, U_0])\varphi - \lambda^3(D_x + [D, U_0])\varphi +$$
$$+(\lambda_t - \lambda\lambda_y)\varphi = 0, \qquad (36)$$

где $[A, B] = AB - BA$.

Из (36) имеем следующую систему уравнений:

$$U_{0t} - A_x + [U_0, A] = 0, \qquad (37)$$

$$U_{0y} + B_x + [B, U_0] = 0, \qquad (38)$$

$$C_x + [C, U_0] = 0, \qquad (39)$$

$$D_x + [D, U_0] = 0, \qquad (40)$$

$$\lambda_t - \lambda\lambda_y = 0. \qquad (41)$$

В силу (32)–(35) уравнения (38)–(41) удовлетворяются тождественно, а уравнение (37) дает (2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза (5), (6). Что и требовалось доказать.

Таким образом, мы построили иерархию систем линейных уравнений, соответствующих нелинейной (2+1)-мерной модели Кортевега де Фриза (5)–(8):

1) $\begin{cases} \varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi \\ \varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi \end{cases}$,

2) $\begin{cases} \varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi \\ \varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi + \lambda^2 C\varphi \end{cases}$,

$$3)\ \begin{cases} \varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi \\ \varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi + \lambda^2 C\varphi + \lambda^3 D\varphi \end{cases},$$

. . . .

где $\lambda = \lambda(y,t)$,

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \overline{\psi} & 0 \end{pmatrix},\ \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},\ \lambda_t = \lambda\lambda_y,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\psi_{xy} - 2\psi^2 - \partial_x^{-1}(\psi_y)\partial_y^{-1}(\psi_x) \\ -\overline{\psi}_{xy} - 2\overline{\psi}^2 - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y)\partial_y^{-1}(\overline{\psi}_x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\psi - \partial_x^{-1}(\psi_y) \\ -2i\partial_x^{-1}\overline{\psi} - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y) & i \end{pmatrix},$$

$$C = D = ... = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\psi \\ -2i\partial_x^{-1}\overline{\psi} & i \end{pmatrix}.$$

Это доказывает интегрируемость нелинейной (2+1)-мерной модели Кортевега де Фриза (5)–(8) и дает возможность решить ее методом обратной задачи рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Морис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М., 1988. 694 с.

2. *Washimi M., Taniuti T.* Propagation of ion acoustic solitary waves of small amplitude // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 17. P. 996-998.

3. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987. 477 с.

4. *Тахтаджан Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М., 1986. 527 с.

5. Теория солитонов. Метод обратной задачи / Под ред. С. П. Новикова. М., 1980. 319 с.

6. *Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.* Об устойчивости уединенных волн в среде со слабой дисперсией // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. С. 753-756.

7. *Kako M., Rowlands G.* Two dimensional stability of ion acoustic solitons // Plasma Physics. 1976. V. 18. С. 165-170.

8. *Tappert F., Varma C.M.* Asymptotic theory of self-trapping of heat pulses in solids // Phys. Rev. Lett. 1970. V. 25. P. 1108-1111.

9. *Narayanamyrti V., Varma C.M.* Nonlinear propagation of heat pulses in solids // Phys. Rev. Lett. 1970. V. 25. P. 1105-1108.

10. *Нижник Л.П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. Киев, 1991. 232 с.

11. *Борзых А.В.* Солитонные решения (2+1)-мерного уравнения Кортевега де Фриза // Докл. НАН РК. №6. 2001. С. 5-11.

12. *Пелиновский Е.Н.* Солитоны в воде. http://intra.rfbr.ru/pub/knigi/janus/pe-linovskij/pelinovs.htm. 28.02.2001.

Резюме

Кортевега де Фриздің (2+1)-өлшемді бейсызық сүлбесі үшін сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің иерархиясы тұрғызылды.

Summary

The hierarchy of the linear differential systems for the (2+1)-dimensional nonlinear Korteweg de Vries model is constructed.

УДК 517.95.958

Институт математики МОН РК, г. Алматы

Поступила 28.03.06г.