О. КАНЛЫБАЕВ

ЗАДАЧА СИНТЕЗА ПАРАМЕТРОВ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЕХАНИЗМА V КЛАССА В ВИДЕ СИСТЕМЫ СТЕПЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим решение задачи синтеза пространственного механизма V класса общего вида в соответствии с рисунком по семи положениям входных звеньев 1, 7 и выходного звена 4:

$$\varphi_{1i} = \varphi_{1i}(t), \quad \varphi_{7i} = \varphi_{7i}(t) \quad \text{и} \quad \psi_{4i} = \psi_{4i}(t), \qquad i = \overline{1,7}. \tag{1}$$

Для решения задачи синтеза используем метод интерполирования. В данном случае число узлов интерполирования равно семи, поэтому будем рассматривать задачу синтеза по шести геометрическим параметрам. Для решения задачи синтеза кинематической цепи *DENMR* механизма использовано выражение взвешенной разности [1].

$$\Delta q = l_5^2 - l_{5\phi}^2, \tag{2}$$

где $l_{5\phi}$ – расстояние между точками *E* и N звена 5 механизма:

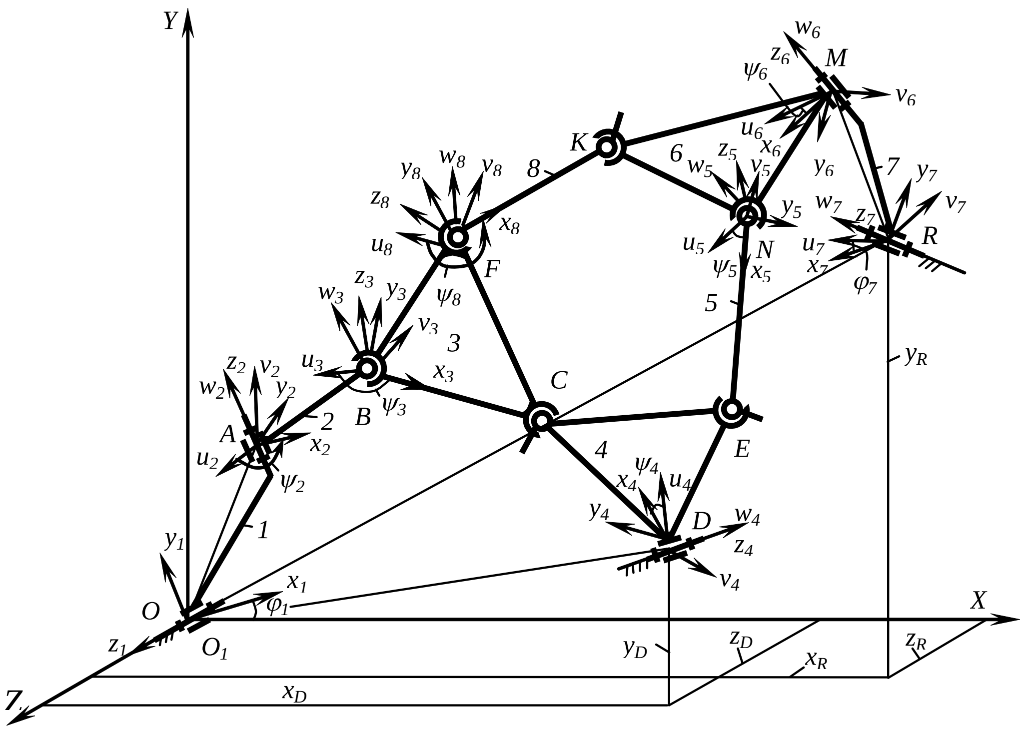
$$l_{5\phi}^2 = (X_E - X_N)^2 + (Y_E - Y_N)^2 + (Z_E - Z_N)^2,$$

X_E, Y_E, Z_E, X_N, Y_N, Z_N – соответствующие координаты точек *E* и *N* в неподвижной системе координат *OXYZ* [2]. Для вычисления семи геометрических параметров рассматриваемой кинематической цепи *DENMR* механизма из набора 16 геометрических параметров определим число вариантов из семи параметров [3] с учетом того, что длина l_5 звена 5 входит во все варианты:

$$C_{15}^6 = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 5005 \text{ вариантов.}$$

Решение задачи синтеза семи геометрических параметров рассмотрим на примере одного из полученных вариантов:

$$a_{67},\ x_{6N},\ y_{6N},\ z_{6N},\ x_{4E},\ y_{4E},\ l_5.$$



Выражение взвешенной разности (2) запишем в виде обобщенного полинома

$$\Delta q = p_1 f_1(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)+p_2 f_2(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)+p_3 f_3(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)+p_4 f_4(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)+$$
$$+p_5 f_5(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)+p_6 f_6(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)+p_7 f_7(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)+p_1 p_2 f_8(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)+$$
$$+p_1 p_3 f_9(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)+p_1 p_5 f_{10}(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)+p_1 p_6 f_{11}(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)+p_2 p_5 f_{12}(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)+$$
$$+p_2 p_6 f_{13}(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)+p_3 p_5 f_{14}(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)+p_3 p_6 f_{15}(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)+p_4 p_5 f_{16}(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6)-$$
$$-F(\varphi_1,\psi_4,\varphi_7,\psi_6). \tag{3}$$

При решении задачи синтеза по методу интерполирования для семи заданных положений механизма отклонения взвешенной разности Δq должны равняться нулю [4]. С учетом этого из выражения (3) имеем

$$p_1 f_1(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})+p_2 f_2(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})+p_3 f_3(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})+p_4 f_4(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})+$$
$$+p_5 f_5(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})+p_6 f_6(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})+p_7 f_7(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})+p_1 p_2 f_8(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})+$$
$$+p_1 p_3 f_9(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})+p_1 p_5 f_{10}(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})+p_1 p_6 f_{11}(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})+$$
$$+p_2 p_5 f_{12}(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})+p_2 p_6 f_{13}(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})+p_3 p_5 f_{14}(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})+$$
$$+p_3 p_6 f_{15}(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})+p_4 p_5 f_{16}(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i})-F(\varphi_{1i},\psi_{4i},\varphi_{7i},\psi_{6i}) = 0, \quad i = \overline{1,7}. \tag{4}$$

Исключим из системы уравнений (4) неизвестное p_7. Получим

$$b_{1i}p_1+b_{2i}p_2+b_{3i}p_3+b_{4i}p_4+b_{5i}p_5+b_{6i}p_6+b_{7i}p_1p_2+b_{9i}p_1p_5+b_{10i}p_1p_6+b_{11i}p_2p_5+b_{8i}p_1p_3+$$
$$+b_{12i}p_2p_6+b_{13i}p_3p_5+b_{14i}p_3p_6+b_{15i}p_4p_5+b_{16i}p_4p_5=B_i, \quad i=\overline{1,6},$$

где

$$b_{ji} = f_{ji}(\varphi_{1i},\psi_{2i},\psi_{4i})-f_{j,7}(\varphi_{1,7},\psi_{2,7},\psi_{4,7}), \qquad i=\overline{1,6}, \quad j=\overline{1,6},$$
$$b_{j+1,i} = f_{j+1,i}(\varphi_{1i},\psi_{2i},\psi_{4i})-f_{j+1,7}(\varphi_{1,7},\psi_{2,7},\psi_{4,7}), \qquad j=\overline{7,16},$$
$$B_i = F(\varphi_{1i},\psi_{2i},\psi_{4i})-F(\varphi_{1,7},\psi_{27},\psi_{47}). \tag{5}$$

Систему (5) из четырех уравнений при i = 1,2,3 и $i = j$ представим в матрично-векторной форме [5] и запишем в виде системы алгебраических уравнений от неизвестного p_1:

$$T_{j3}(p_5,p_6)p_1^3+T_{j2}(p_5,p_6)p_1^2+T_{j1}(p_5,p_6)p_1+T_{j0}(p_5,p_6)=0, \quad j=4,5,6, \tag{6}$$

где

$$T_{j0}(p_5,p_6)=(\gamma_{j0}+\gamma_{j2}p_5+\gamma_{j3}p_6+\gamma_{j6}p_5p_6+\gamma_{j9}p_5^2+\gamma_{j10}p_6^2+\gamma_{j15}p_5^2p_6+\gamma_{j16}p_5p_6^2+$$
$$+\gamma_{j19}p_5^2p_6^2+\gamma_{j27}p_5^3+\gamma_{j28}p_6^3+\gamma_{j33}p_5^3p_6+\gamma_{j34}p_5p_6^3+\gamma_{j38}p_5^4+\gamma_{j39}p_6^4);$$
$$T_{j1}(p_5,p_6)=(\gamma_{j1}+\gamma_{j4}p_5+\gamma_{j5}p_6+\gamma_{j7}p_5p_6+\gamma_{j12}p_5^2+\gamma_{j14}p_6^2+\gamma_{j21}p_5^2p_6+\gamma_{j22}p_5p_6^2+$$
$$+\gamma_{25}p_5^2p_6^2+\gamma_{j30}p_5^3+\gamma_{j32}p_6^3+\gamma_{j36}p_5^3p_6+\gamma_{j37}p_5p_6^3+\gamma_{j40}p_5^4+\gamma_{j41}p_6^4);$$
$$T_{j2}(p_5,p_6)=(\gamma_{j8}+\gamma_{j11}p_5+\gamma_{j13}p_6+\gamma_{j17}p_5^2+\gamma_{j18}p_6^2+\gamma_{j20}p_5p_6+\gamma_{j23}p_5^2p_6+\gamma_{j24}p_5p_6^2+\gamma_{j42}p_5^3+\gamma_{j43}p_6^3);$$
$$T_{j3}(p_5,p_6)=(\gamma_{j26}+\gamma_{j29}p_5+\gamma_{j31}p_6+\gamma_{j35}p_5p_6+\gamma_{j44}p_5^2+\gamma_{j45}p_6^2).$$

Коэффициенты $\{\gamma_{j,m}\}$, $(j=4,5,6; \quad m=\overline{1,45})$ системы алгебраических уравнений (6) не содержат неизвестных p_2, p_3, p_4. Исключив неизвестное p_1 из системы алгебраических уравнений (6), получим два уравнения относительно неизвестных p_5, p_6 в виде

$$\begin{bmatrix} T_{40}(p_5,p_6) & T_{41}(p_5,p_6) & T_{42}(p_5,p_6) & T_{43}(p_5,p_6) & 0 \\ T_{50}(p_5,p_6) & T_{51}(p_5,p_6) & T_{52}(p_5,p_6) & T_{53}(p_5,p_6) & 0 \\ T_{60}(p_5,p_6) & T_{61}(p_5,p_6) & T_{62}(p_5,p_6) & T_{463}(p_5,p_6) & 0 \\ 0 & T_{40}(p_5,p_6) & T_{41}(p_5,p_6) & T_{42}(p_5,p_6) & T_{43}(p_5,p_6) \\ 0 & T_{50}(p_5,p_6) & T_{51}(p_5,p_6) & T_{52}(p_5,p_6) & T_{53}(p_5,p_6) \end{bmatrix} = 0, \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} T_{40}(p_5,p_6) & T_{41}(p_5,p_6) & T_{42}(p_5,p_6) & T_{43}(p_5,p_6) & 0 \\ T_{50}(p_5,p_6) & T_{51}(p_5,p_6) & T_{52}(p_5,p_6) & T_{53}(p_5,p_6) & 0 \\ T_{60}(p_5,p_6) & T_{61}(p_5,p_6) & T_{62}(p_5,p_6) & T_{463}(p_5,p_6) & 0 \\ 0 & T_{40}(p_5,p_6) & T_{41}(p_5,p_6) & T_{42}(p_5,p_6) & T_{43}(p_5,p_6) \\ 0 & T_{60}(p_5,p_6) & T_{61}(p_5,p_6) & T_{62}(p_5,p_6) & T_{63}(p_5,p_6) \end{bmatrix} = 0. \tag{8}$$

Каждое из уравнений (7) и (8) представляет собой многочлен от двух неизвестных p_5, p_6. Левая часть уравнения (7) является алгебраическим уравнением 11 степени относительно неизвестного p_6 [5]:

$$\sum_{s=0}^{11} \tau_s \cdot p_6^s = 0, \tag{9}$$

где τ_0, τ_1, ..., τ_{11} выражаются через $\{\gamma_{j,m}\}$, $(j = 4{,}5{,}6; \quad m = \overline{1{,}45})$.

Алгебраическое уравнение 11 степени относительно неизвестного p_6 имеет вид

$$S_{11}\left(p_5^5\right)p_6^{11} + S_{10}\left(p_5^{12}\right)p_6^{10} + S_9\left(p_5^{12}\right)p_6^9 + S_8\left(p_5^{12}\right)p_6^8 + S_7\left(p_5^{12}\right)p_6^7 + S_6\left(p_5^{12}\right)p_6^6 +$$
$$+S_5\left(p_5^{12}\right)p_6^5 + S_4\left(p_5^{12}\right)p_6^4 + S_3\left(p_5^{12}\right)p_6^3 + S_2\left(p_5^{12}\right)p_6^2 + S_1\left(p_5^{12}\right)p_6 + S_0\left(p_5^{12}\right) = 0. \tag{10}$$

Левая часть уравнения (9) представляет собой аналогичное алгебраическое уравнение 11 степени относительно неизвестного p_6:

$$\sum_{s=0}^{11} h_s \cdot p_6^s = 0, \tag{11}$$

где h_0, h_j, ..., h_{11} выражаются через $\{\gamma_{j,m}\}$, $(j = 4{,}5{,}6; \quad m = \overline{1{,}45})$.

Алгебраическое уравнение 11 степени относительно неизвестного p_6 имеет вид

$$H_{11}\left(p_5^5\right)p_6^{11} + H_{10}\left(p_5^{12}\right)p_6^{10} + H_9\left(p_5^{12}\right)p_6^9 + H_8\left(p_5^{12}\right)p_6^8 + H_7\left(p_5^{12}\right)p_6^7 + H_6\left(p_5^{12}\right)p_6^6 +$$
$$+H_5\left(p_5^{12}\right)p_6^5 + H_4\left(p_5^{12}\right)p_6^4 + H_3\left(p_5^{12}\right)p_6^3 + H_2\left(p_5^{12}\right)p_6^2 + H_1\left(p_5^{12}\right)p_6 + H_0\left(p_5^{12}\right) \quad 0 = \tag{12}$$

Анализ уравнений (10) и (12) приводит к степенным уравнениям относительно неизвестного p_6. Исключив неизвестное p_6 из указанных систем уравнений, получим алгебраическое уравнение 257 степени относительно неизвестного p_5:

$$\sum_{k=0}^{257} s_k \cdot p_5^k = 0, \tag{13}$$

где k_0, k_1, k_3, ..., k_{257} выражаются через составляющие уравнений (10) и (12):

$$S_{11}\left(p_5^5\right),\ S_{10}\left(p_5^{12}\right), S_9\left(p_5^{12}\right), \ldots\ldots, S_0\left(p_5^{12}\right),$$

$$H_{11}\left(p_5^5\right),\ H_{10}\left(p_5^{12}\right),\ H_9\left(p_5^{12}\right), \ldots\ldots\ldots, H_0\left(p_5^{12}\right).$$

Решив уравнение (13), найдем вещественные решения относительно неизвестного p_5. Число вещественных решений уравнения (13) определяется по теореме Штурма [5]. Для положительных вещественных значений неизвестного параметра p_5 вычислим значения остальных параметров – p_1, p_2, p_3, p_4, p_6, p_7. Определим неизвестные геометрические параметры рассматриваемой кинематической цепи *DENMR* механизма по формулам

$$a_{67} = p_1,\ x_{6N} = p_2,\ y_{6N} = p_3,\ z_{6N} = p_4,\ x_{4E} = p_5,\ y_{4E} = p_6,\ l_5 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 - p_7}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А.* Синтез плоских механизмов. М.: Госиздат, 1959. 1084 с.
2. *Саткалиева М.О.* Уравнения преобразования кинематических цепей пространственного рычажного механизма V класса // Вестник МОН РК, НАН РК. 2004. № 5. С. 178-181.
3. *БронштейнИ.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1986. 544 с.
4. *Канлыбаев О.*Синтез пространственного передаточного рычажного механизма V класса с двумя входными звеньями по заданным шести положениям // Материалы международ. научной конференции, КазНТУ им. К. Сатпаева. Алматы, 2005. Т. II. С. 236-238.
5. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М., 2003. 431 с.

Резюме

V класты кеңістікті механизмнің жетекші буыны мен шығыс буынның берілген жағдайына байланысты, осы механизмнің жеті параметрлерінің синтез есебі қарастырылды. үш белгісізі бар үш теңдеуден құралған дәрежелі теңдеулер жүйесінің бір белгісізін шығару шешімі көрсетілген.

Summary

The task of synthesis of seven parameters of a spatial mechanism of V class upon set positions of input and output links is considered. The solving of excluding of unknown from a system of the power multinomials with the unknowns

УДК 621.01:531

Казахский национальный университет им. аль-Фараби. г. Алматы

Поступила 17.03.06 г.

А. В. АЛЕКСЕЕВА

(2+1)-МЕРНАЯ МОДЕЛЬ КОРТЕВЕГА ДЕ ФРИЗА И ЕЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

В 1960-х гг. было выявлено, что проблемы взаимодействия волн большой амплитуды, которые возникают в физике плазмы, нелинейной оптике, физике ферромагнетиков, имеют много общего с классической задачей о нелинейных волнах на поверхности тяжелой жидкости [1, с. 288–289]. Многие физические задачи о нелинейных волнах описываются универсальной математической моделью – уравнением Кортевега де Фриза.

Классическое уравнение Кортевега де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad (1)$$

описывает как слабые длинные гидромагнитные волны в плазме и волны на воде, так и слабо нелинейные ионно-акустические волны сжатия в плазме [2]. Несмотря на то, что структура и свойства (1+1)-*мерного* (модифицированного) уравнения Кортевега де Фриза (1) достаточно хорошо изучены (см., например, [1–5]), еще многое неизвестно о свойствах многомерных нелинейных эволюционных уравнений.

В 1970 г. Кадомцев и Петвиашвили [6] получили *двумерный вариант уравнения Кортевега де Фриза*

$$(u_{xxx} + 6u^2 + u_x + u_t)_x - u_{yy} = 0 \qquad (2)$$

для слабо длинных нелинейных волн в диспергирующих средах. В 1976 г. Како и Роулендз [7] получили уравнение (2) для двумерного распространения ионно-акустических солитонов. Далее Тапперт и Варма [8], а также Нараянамурти и Варма [9] получили уравнение (2) при изучении распространения тепловых импульсов в твердых телах. Поскольку уравнение (2) возникает в разных физических ситуациях, его вполне обоснованно можно рассматривать как *модельное* уравнение.

В 1988 г. Л. П. Нижник [10, с. 188–189] предложил *пространственную двумеризацию модифицированного уравнения Кортевега де Фриза* в виде

$$u_t = u_{xxx} + u_{yyy} + (vu)_y + (wu)_x - \frac{1}{2}(v_y + w_x)u, \qquad (3)$$

$$u_x = 3(u^2)_y, \quad w_y = 3(u^2)_x. \qquad (4)$$

Уравнение (3), (4) было найдено исходя из возможности существования для данного уравнения пары Лакса, что позволяет решить уравнение (3), (4) методом обратной задачи рассеяния.

В [11] было получено *(2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза* в виде

$$\psi_t + \psi_{xxy} + 4\psi\psi_x + V\psi_y + V_x U = 0, \qquad (5)$$