А. В. АЛЕКСЕЕВА

(2+1)-МЕРНАЯ МОДЕЛЬ КОРТЕВЕГА ДЕ ФРИЗА И ЕЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

В 1960-х гг. было выявлено, что проблемы взаимодействия волн большой амплитуды, которые возникают в физике плазмы, нелинейной оптике, физике ферромагнетиков, имеют много общего с классической задачей о нелинейных волнах на поверхности тяжелой жидкости [1, с. 288–289]. Многие физические задачи о нелинейных волнах описываются универсальной математической моделью – уравнением Кортевега де Фриза.

Классическое уравнение Кортевега де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

описывает как слабые длинные гидромагнитные волны в плазме и волны на воде, так и слабо нелинейные ионно-акустические волны сжатия в плазме [2]. Несмотря на то, что структура и свойства (1+1)-*мерного* (модифицированного) уравнения Кортевега де Фриза (1) достаточно хорошо изучены (см., например, [1–5]), еще многое неизвестно о свойствах многомерных нелинейных эволюционных уравнений.

В 1970 г. Кадомцев и Петвиашвили [6] получили *двумерный вариант уравнения Кортевега де Фриза*

$$(u_{xxx} + 6u^2 + u_x + u_t)_x - u_{yy} = 0 \tag{2}$$

для слабо длинных нелинейных волн в диспергирующих средах. В 1976 г. Како и Роулендз [7] получили уравнение (2) для двумерного распространения ионно-акустических солитонов. Далее Тапперт и Варма [8], а также Нараянамурти и Варма [9] получили уравнение (2) при изучении распространения тепловых импульсов в твердых телах. Поскольку уравнение (2) возникает в разных физических ситуациях, его вполне обоснованно можно рассматривать как *модельное* уравнение.

В 1988 г. Л. П. Нижник [10, с. 188–189] предложил *пространственную двумеризацию модифицированного уравнения Кортевега де Фриза* в виде

$$u_t = u_{xxx} + u_{yyy} + (vu)_y + (wu)_x - \frac{1}{2}(v_y + w_x)u, \tag{3}$$

$$u_x = 3(u^2)_y, \quad w_y = 3(u^2)_x. \tag{4}$$

Уравнение (3), (4) было найдено исходя из возможности существования для данного уравнения пары Лакса, что позволяет решить уравнение (3), (4) методом обратной задачи рассеяния.

В [11] было получено *(2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза* в виде

$$\psi_t + \psi_{xxy} + 4\psi\psi_x + V\psi_y + V_xU = 0, \tag{5}$$

$$V_y = \psi_x\,,\;\; U_x = \psi_y\,, \qquad (6)$$

в соответствии с [5, с. 10–11] в предположении возможности существования для данного уравнения билинейной формы

$$(D_y D_t + D_y^2 D_x^2)(\varphi \circ \varphi) = 0\,,$$

$$D_x^m D_t^n (F \circ G) =$$

$$= \left(\partial_x - \partial_{x'}\right)^m \left(\partial_t - \partial_{t'}\right)^n F(x,t) G(x',t')\Big|_{x'=x, t'=t}\,,$$

которая позволяет решить уравнение (5), (6) методом Хироты.

Здесь $\psi = \psi(x,y,t)$ – искомая комплекснозначная функция из пространства Шварца, т.е. непрерывна вместе с частными производными любого порядка, и при $|x| \to \infty$ убывает вместе со всеми своими частными производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$.

Для уравнения (5), (6) рассмотрим задачу Коши с *начальным условием*

$$\psi(x,y,t)\big|_{t=0} = \psi_0(x,y)\,, \qquad (7)$$

где $\psi_0(x,y)$ – заданная комплекснозначная функция из пространства Шварца.

В 1965 г. Краскал и Забужский обнаружили, что уравнение Кортевега де Фриза (1) имеет точное решение – *солитон*. Под солитоном понимают уединенную волну, которая ведет себя как частица, т.е. распространяется без потерь или приобретения энергии, не изменяя формы и скорости, и «упруго» взаимодействует с себе подобными. После взаимодействия солитон сохраняет скорость и восстанавливает асимптотически свою точную первоначальную форму с возможным смещением фазы [3, с. 15]. Амплитуда и скорость солитона пропорциональны, т.е. чем выше уединенная волна, тем быстрей она бежит. Такую зависимость скорости распространения волны от ее амплитуды принято называть *нелинейностью* [12, с. 2].

Другой особенностью солитона является то, что его распространение в многомерном пространстве ограничено только *одной* пространственной координатой. Такое ограничение позволяет солитону сохранять свою амплитуду и, следовательно, скорость [12, с. 2]. Поэтому (2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза (5), (6) снабдим *граничным условием* только по одной пространственной переменной x:

$$\psi(x,y,t) \to 0 \;\text{ при }\; |x| \to \infty\,. \qquad (8)$$

Таким образом, под *(2+1)-мерной моделью Кортевега де Фриза* будем понимать уравнение (5), (6) вместе с начальным (7) и граничным (8) условиями.

Теорема 1. (2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза (5), (6) можно свести к системе линейных дифференциальных уравнений вида

$$\varphi_x = U_0 \varphi + \lambda \varphi\,, \qquad (9)$$

$$\varphi_t = \lambda \varphi_y + A\varphi + \lambda B \varphi\,, \qquad (10)$$

где $\lambda = \lambda(y,t)$,

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \overline{\psi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\psi_{xy} - 2\psi^2 - \partial_x^{-1}(\psi_y)\partial_y^{-1}(\psi_x) \\ -\overline{\psi}_{xy} - 2\overline{\psi}^2 - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y)\partial_y^{-1}(\overline{\psi}_x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

$$B = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\psi - \partial_x^{-1}(\psi_y) \\ -2i\partial_x^{-1}\overline{\psi} - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y) & i \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

$$\lambda_t = \lambda \lambda_y\,. \qquad (14)$$

Доказательство. Действительно, условие совместности системы линейных дифференциальных уравнений (9), (10) имеет вид

$$\varphi_{xt} = \varphi_{tx}\,,$$

или

$$(U_{0t} - A_x + [U_0, A])\varphi + \lambda(-U_{0y} - B_x + [U_0, B])\varphi +$$

$$+ (\lambda_t - \lambda\lambda_y)\varphi = 0\,, \qquad (15)$$

где $[A,B] = AB - BA$.

Из (15) имеем следующую систему уравнений:

$$U_{0t} - A_x + [U_0, A] = 0\,, \qquad (16)$$

$$-U_{0y} - B_x + [U_0, B] = 0\,, \qquad (17)$$

$$\lambda_t - \lambda\lambda_y = 0\,. \qquad (18)$$

В силу (11)–(14) уравнения (17), (18) удовлетворяются тождественно, а уравнение (16) дает (2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза (5),(6). Что и требовалось доказать.

Замечание. Отметим, что при фиксированных переменных y и t, комплексный параметр λ играет роль спектрального параметра уравнения (9). Поэтому он не зависит от переменной x, т.е. $\lambda = \lambda(y,t)$. При этом, как видно из уравнения (15), он удовлетворяет условию (14).

Теорема 2. (2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза (5), (6) можно свести к системе линейных дифференциальных уравнений вида

$$\varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi, \qquad (19)$$

$$\varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi + \lambda^2 C\varphi, \qquad (20)$$

где $\lambda = \lambda(y,t)$,

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \overline{\psi} & 0 \end{pmatrix},\ \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},\ \lambda_t = \lambda\lambda_y, \qquad (21)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\psi_{xy} - 2\psi^2 - \partial_x^{-1}(\psi_y)\partial_y^{-1}(\psi_x) \\ -\overline{\psi}_{xy} - 2\overline{\psi}^2 - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y)\partial_y^{-1}(\overline{\psi}_x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad (22)$$

$$B = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\psi - \partial_x^{-1}(\psi_y) \\ -2i\partial_x^{-1}\overline{\psi} - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y) & i \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

$$C = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\psi \\ -2i\partial_x^{-1}\overline{\psi} & i \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Доказательство. Действительно, условие совместности системы линейных дифференциальных уравнений (19), (20) имеет вид

$$\varphi_{xt} = \varphi_{tx}$$

или

$$(U_{0t} - A_x + [U_0, A])\varphi - \lambda(U_{0y} + B_x + [B,U_0])\varphi -$$
$$-\lambda^2(C_x + [C,U_0])\varphi + (\lambda_t - \lambda\lambda_y)\varphi = 0, \qquad (25)$$

где $[A, B] = AB - BA$.

Из (15) имеем следующую систему уравнений:

$$U_{0t} - A_x + [U_0, A] = 0, \qquad (26)$$

$$U_{0y} + B_x + [B,U_0] = 0, \qquad (27)$$

$$C_x + [C,U_0] = 0, \qquad (28)$$

$$\lambda_t - \lambda\lambda_y = 0. \qquad (29)$$

В силу (21)–(24) уравнения (27)–(29) удовлетворяются тождественно, а уравнение (26) дает (2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза (5), (6). Что и требовалось доказать.

Теорема 3. (2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза (5), (6) можно свести к системе линейных дифференциальных уравнений вида

$$\varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi, \qquad (30)$$

$$\varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi + \lambda^2 C\varphi + \lambda^3 D\varphi, \qquad (31)$$

где $\lambda = \lambda(y,t)$,

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \overline{\psi} & 0 \end{pmatrix},\ \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},\ \lambda_t = \lambda\lambda_y, \qquad (32)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\psi_{xy} - 2\psi^2 - \partial_x^{-1}(\psi_y)\partial_y^{-1}(\psi_x) \\ -\overline{\psi}_{xy} - 2\overline{\psi}^2 - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y)\partial_y^{-1}(\overline{\psi}_x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad (33)$$

$$B = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\psi - \partial_x^{-1}(\psi_y) \\ -2i\partial_x^{-1}\overline{\psi} - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y) & i \end{pmatrix}, \qquad (34)$$

$$C = D = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\psi \\ -2i\partial_x^{-1}\overline{\psi} & i \end{pmatrix}. \qquad (35)$$

Доказательство. Действительно, условие совместности системы линейных дифференциальных уравнений (30), (31) имеет вид

$$\varphi_{xt} = \varphi_{tx},$$

или

$$(U_{0t} - A_x + [U_0, A])\varphi - \lambda(U_{0y} + B_x + [B,U_0])\varphi -$$
$$-\lambda^2(C_x + [C,U_0])\varphi - \lambda^3(D_x + [D,U_0])\varphi +$$
$$+(\lambda_t - \lambda\lambda_y)\varphi = 0, \qquad (36)$$

где $[A, B] = AB - BA$.

Из (36) имеем следующую систему уравнений:

$$U_{0t} - A_x + [U_0, A] = 0, \qquad (37)$$

$$U_{0y} + B_x + [B,U_0] = 0, \qquad (38)$$

$$C_x + [C,U_0] = 0, \qquad (39)$$

$$D_x + [D,U_0] = 0, \qquad (40)$$

$$\lambda_t - \lambda\lambda_y = 0. \qquad (41)$$

В силу (32)–(35) уравнения (38)–(41) удовлетворяются тождественно, а уравнение (37) дает (2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза (5), (6). Что и требовалось доказать.

Таким образом, мы построили иерархию систем линейных уравнений, соответствующих нелинейной (2+1)-мерной модели Кортевега де Фриза (5)–(8):

1) $\begin{cases} \varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi \\ \varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi \end{cases}$,

2) $\begin{cases} \varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi \\ \varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi + \lambda^2 C\varphi \end{cases}$,

3) $$\begin{cases} \varphi_x = U_0\varphi + \lambda\varphi \\ \varphi_t = \lambda\varphi_y + A\varphi + \lambda B\varphi + \lambda^2 C\varphi + \lambda^3 D\varphi \end{cases},$$

. . . ……………………………………………

где $\lambda = \lambda(y,t)$,

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \overline{\psi} & 0 \end{pmatrix},\ \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},\ \lambda_t = \lambda\lambda_y,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ -\overline{\psi}_{xy} - 2\overline{\psi}^2 - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y)\partial_y^{-1}(\overline{\psi}_x) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{matrix} -\psi_{xy} - 2\psi^2 - \partial_x^{-1}(\psi_y)\partial_y^{-1}(\psi_x) \\ 0 \end{matrix}\Bigg),$$

$$B = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\psi - \partial_x^{-1}(\psi_y) \\ -2i\partial_x^{-1}\overline{\psi} - \partial_x^{-1}(\overline{\psi}_y) & i \end{pmatrix},$$

$$C = D = ... = \begin{pmatrix} i & -2i\partial_x^{-1}\psi \\ -2i\partial_x^{-1}\overline{\psi} & i \end{pmatrix}.$$

Это доказывает интегрируемость нелинейной (2+1)-мерной модели Кортевега де Фриза (5)–(8) и дает возможность решить ее методом обратной задачи рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Морис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М., 1988. 694 с.

2. *Washimi M., Taniuti T.* Propagation of ion acoustic solitary waves of small amplitude // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 17. P. 996-998.

3. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987. 477 с.

4. *Тахтаджан Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М., 1986. 527 с.

5. Теория солитонов. Метод обратной задачи / Под ред. С. П. Новикова. М., 1980. 319 с.

6. *Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.* Об устойчивости уединенных волн в среде со слабой дисперсией // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. С. 753-756.

7. *Kako M., Rowlands G.* Two dimensional stability of ion acoustic solitons // Plasma Physics. 1976. V. 18. C. 165-170.

8. *Tappert F., Varma C.M.* Asymptotic theory of self-trapping of heat pulses in solids // Phys. Rev. Lett. 1970. V. 25. P. 1108-1111.

9. *Narayanamyrti V., Varma C.M.* Nonlinear propagation of heat pulses in solids // Phys. Rev. Lett. 1970. V. 25. P. 1105-1108.

10. *Нижник Л.П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. Киев, 1991. 232 с.

11. *Борзых А.В.* Солитонные решения (2+1)-мерного уравнения Кортевега де Фриза // Докл. НАН РК. №6. 2001. С. 5-11.

12. *Пелиновский Е.Н.* Солитоны в воде. http://intra.rfbr.ru/pub/knigi/janus/pe-linovskij/pelinovs.htm. 28.02.2001.

Резюме

Кортевега де Фриздің (2+1)-өлшемді бейсызық сүлбесі үшін сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің иерархиясы тұрғызылды.

Summary

The hierarchy of the linear differential systems for the (2+1)-dimensional nonlinear Korteweg de Vries model is constructed.

УДК 517.95.958

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 28.03.06г.