Х. КОЖАМУРАТОВ

КИНЕМАТИКА СФЕРИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

В теории сферического движения тела пользуются понятием о мгновенной оси вращения, скорости точек которой равны нулю, а ускорения – нет. Если тело хоть мгновение вращается вокруг оси, то и скорость и ускорение его точек в этот момент должны отсутствовать. В данной работе показана необходимость отказа от идеи существования мгновенной оси вращения тела в сферическом движении и изложения его кинематики с использованием сферической тригонометрии.

Теория сферического движения тела признает наличие мгновенной оси, скорости точек которой равны нулю. Признано также наличие мгновенной оси углового ускорения тела, ускорения точек которой равны нулю [1]. Первая ось называется мгновенной осью вращения тела, а вторая – нет, так как точки мгновенной оси вращения имеют ускорение, а точки мгновенной оси углового ускорения – скорость. Для устранения данного противоречия необходимо отказаться от идеи существования мгновенной оси вращения, признавая наличие мгновенных осей скоростей и ускорений при определении скорости и ускорения точек тела по простым формулам вращательного движения. Мгновенная ось скоростей (ускорений) представляет собой геометрическое место точек тела, скорости (ускорения) движения которых в данное мгновение равны нулю. При этом возникает необходимость изложения теории сферического движения тела с применением основных положений сферической тригонометрии [2].

Определим углы Эйлера по уравнениям слагаемых вращений. Пусть твердое тело одновременно вращается вокруг нескольких осей, пересекающихся в одной неподвижной точке 0 согласно известным уравнениям

$$\varphi_1 = \varphi_1(t), \quad \varphi_2 = {}_2(t), \ldots, \quad \varphi = \varphi\,(t),$$

где $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ – уравнение вращения первой подвижной оси вокруг неподвижной оси; $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ – уравнение вращения второй подвижной оси вокруг первой подвижной оси и т.д.; $\varphi = \varphi\,(t)$ – уравнение собственного вращения тела вокруг последней подвижной оси.

Неподвижную систему координат $OX_1Y_1Z_1$ расположим таким образом, чтобы ось OZ_1 совместилась с неподвижной осью переносного вращения, а плоскость $Y_1 0 Z_1$ проходила через начальное положение оси $0Z_0$ собственного вращения тела (см. рисунок). Тогда в начальное мгновение времени линия узлов будет направлена по оси $0X_1$ и угол прецессии будет равен нулю. Начальное положение подвижной системы координат определяется начальными значениями

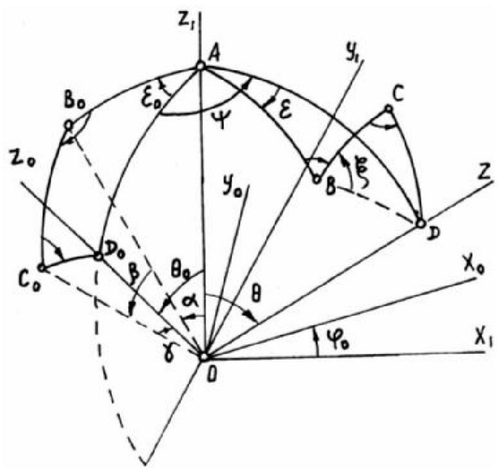

Схема расположения осей координат и слагаемых вращений

углов собственного вращения φ_0, прецессии $\psi_0 = 0$ и нутации θ_0. При этом начальное значение φ_0 угла собственного вращения может быть любым, в зависимости от того, через какую точку тела, взятую вне оси собственного вращения, проведена координатная плоскость $Z_0 0 X_0$ в начальное мгновение времени. Начальное значение θ_0 угла нутации определяется взаимным расположением осей слагаемых вращений в начальное мгновение времени.

Если провести сферическую поверхность с центром в неподвижной точке 0, то она пересекается с неподвижной осью переносного вращения в точке А, с осью собственного вращения тела – в точке $Д_0$, с первой и второй подвижными осями – в точках B_0 и C_0 (в начальное мгновение времени). Тогда начальное значение θ_0 угла нутации определяется как длина дуги $АД_0$ большого круга проведенной сферы, выраженная в радианах. Если известны углы (α, β, γ и т.д.) между осями слагаемых вращений и углы B_0, C_0, $Д_0$ сферического многоугольника $AB_0C_0Д_0$, характеризующего взаимное расположение этих осей в начальное мгновение времени, то стороны этого многоугольника будут известными: $AB_0 = \alpha$, $B_0C_0 = \beta$, $C_0Д_0 = \gamma$, $АД_0 = \theta_0$.

В мгновение времени t после начала движения, когда ось собственного вращения тела проходит через некоторую точку Д на поверхности той же сферы, а промежуточные две подвижные оси слагаемых вращений – через точки В, С (см. рисунок), дуга AB_0 большого круга сферы повернется на угол $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ и займет положение АВ, т.е. $\angle B_0AB = \varphi_1$. Угол φ_1, а также углы φ_2, φ_3, … и φ считаются положительными, когда соответствующие им вращения происходят по часовой стрелке, если смотреть от неподвижной точки 0.

Во время слагаемых вращений стороны сферического многоугольника АВСД, за исключением стороны АД, не изменяются по длине ($AB = \alpha$, $BC = \beta$, $СД = \gamma$), а углы при его вершинах изменяются с течением времени. В мгновение времени t угол нутации θ совпадает с длиной стороны АД сферического многоугольника АВСД, а угол прецессии ψ – со значением сферического угла $Д_0АД$. Углы В, С между дугами АВ, ВС и СД больших кругов определяются как суммы $B = B_0 + \varphi_2(t)$, $C = C_0 + \varphi_3(t)$, где углы В и С, так же как их начальные значения (B_0 и C_0) и угол ε_0, считаются положительными когда они отсчитываются от базовой дуги по часовой стрелке, если смотреть от неподвижной точки 0. При этом для угла В базовой является дуга АВ, для угла С – дуга ВС, а для угла ε – АД.

Если вычисленные значения углов В, С и т.д. окажутся больше π, то соответствующие им внутренние углы сферического многоугольника АВСД определяются как их дополнение до 2π, т.е.

$$B = 2\pi - [B_0+\varphi_2(t)],\ C = 2\pi - [C_0+\varphi_3(t)] \text{ и т.д.}$$

Разобьем сферический многоугольник АВСД на ряд сферических треугольников: ΔВСД, ΔАВД и т.д. Из ΔВСД по формуле котангенсов сферической тригонометрии определим угол $\angle$СВД, а по формуле косинусов – длину стороны ВД:

$$\mathrm{ctg}\gamma \sin\beta = \cos\beta\cos C + \sin C\ \mathrm{ctg}\xi,$$

$$\cos\ ВД = \cos\varphi\cos\beta + \sin\gamma\ \sin\beta\cos C,$$

$$\xi = \mathrm{arcctg}\frac{\mathrm{ctg}\gamma\sin\beta - \cos\beta\cos C}{\sin C},$$

$$ВД = \arccos(\cos\gamma\cos\beta+\sin\gamma\sin\beta\cos C).$$

Из ΔАВД по аналогичным формулам определим угол ε ($\angle$ВАД) и длину стороны АД, так как угол $\angle$АВД = В+ξ:

$$\mathrm{ctg}\ ВД \sin\alpha = \cos\alpha\ \cos(\beta+\xi)+\sin(B+\xi)\mathrm{ctg}\varepsilon,$$

$$\cos АД = \cos\alpha\cos ВД + \sin\alpha\sin ВД\cos(B+\xi),$$

$$\varepsilon = \mathrm{arcctg}\frac{\mathrm{ctg}ВД\sin\alpha - \cos\alpha\cos(B+\xi)}{\sin(B+\xi)},$$

$$АД = \arccos[\cos\alpha\cos ВД + \sin\alpha\sin ВД\cos(B+\xi)].$$

Тогда угол прецессии ψ в мгновение времени t определяется как разность $\psi = \varphi1(t) + \varepsilon_0 - \varepsilon$.

Следовательно, по заданным уравнениям слагаемых вращений вокруг пересекающихся в одной точке осей и по известным их взаимным расположениям в начальное мгновение времени значения углов Эйлера в текущее мгновение времени t определяются по формулам

$$\psi = \varepsilon_0 + \varphi_1(t) - \operatorname{arcctg}\frac{\operatorname{ctg} ВД \sin\alpha - \cos\alpha\cos(B+\xi)}{\sin(B+\xi)},$$

$$\theta = \arccos[\cos\alpha\cos ВД + \sin\alpha ВД\cos(B+\xi)],$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi\,(t),$$

где

$$ВД = \arccos\cos\gamma\cos\beta+\sin\gamma\sin\beta\cos[C_0+\varphi_3(t)]\},$$

$$B = B_0 + \varphi_2(t),$$

$$\xi = \operatorname{arcctg}\frac{\operatorname{ctg}\gamma\sin\beta - \cos\beta\cos\left[C_0+\varphi_3(t)\right]}{\sin\left[C_0+\varphi_3(t)\right]}.$$

В заключение отметим, что в случае сложения нескольких вращений тела вокруг пересекающихся в одной точке осей его сферическое движение определяется количеством и уравнениями слагаемых вращений, а также взаимным расположением этих осей и последовательностью их сложения. Уравнения сферического движения устанавливаются по заданным уравнениям слагаемых вращений и законам сферической тригонометрии. Далее можно определить угловые скорость и ускорение тела с учетом дополнительного углового ускорения [3] и провести динамический анализ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Яблонский А.А., Никифорова В.М.* Курс теоретической механики: Учебник для втузов. М.: Высш. школа, 1977. Ч. 1. Статика и кинематика.

2. *Халхунов В.З.* Сферическая астрономия. М.: Недра, 1972.

3. *Кожамуратов Х.К.* О добавочном угловом ускорении твердого тела с одной неподвижной точкой // VII Казахстанская межвузовская научная конференция по математике и механике: Тез. докл. Караганда: КарГУ, 1981. С. 18.

Резюме

Сфералық қозғалыста дененің лездік жылдамдықтар мен үдеулер өстерінің бар екенін мойындау қажеттілігі және лездік айналу өсі туралы түсініктің қажетсіздігі негізделген. Дененің сфералық қозғалыс кинематикасын сфералық тригонометрия негізінде баяндау мүмкіндігі көрсетілген.

Summary

Acknowledgement of the existence of instant axis of speeds and accelerations and necessity of the annulment of notion about instant axis of rotation is based in spherical motion of a body. Possibility of statement spherical motion kinematics of a body is showed on the base spherical trigonometry.

УДК 531 (075.8)

Казахский национальный технический университет им. К. Сатпаева, г. Алматы

Поступила 10.02.04 г.