

Рис. 3

мацию с каждым существенным отсчетом. Например, при  $N = 64$  и  $K_{сж} = 30$  объем служебной информации  $-\Delta n_{адр}$  сокращается почти в 6 раз и, наоборот, при  $K_{сж} = 4$  и  $N = 60$  объем служебной информации  $+\Delta n_{адр}$  увеличивается более чем в 2 раза.

**Резюме**

Акпараттың өлшеу жүйелеріндегі қызметтік ақпарат-

ты қалыптастыру мәселелері қарастырылады. Мақалада қызметтік ақпаратты қалыптастырудың әр түрлі тәсілдері беріліп, оларды салыстыру үшін баға беру теңдеуі беріледі. Қызметтік ақпаратты тапсырудың әр түрлі тәсілдерінің артықшылықтары мен кемшіліктері көрсетілді.

УДК 629.7.05.001

КазАТК им. М. Тынышпаева,  
Шымкентский филиал

Поступила 3.03.06г.

М. И. РАМАЗАНОВ

**О ТОЧЕЧНОМ СПЕКТРЕ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ «СУЩЕСТВЕННО» НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

К «существенно» нагруженным дифференциальным уравнениям мы приходим при эквивалентном преобразовании нелокальных граничных задач в локальные, но уже для нагруженных уравнений [1], а также при решении некоторых обратных задач. Эти же модели возникают в задачах оптимального управления по принципу обратной связи, когда наблюдение за распределенным объектом управления производится по некоторым (не обязательно фиксированным) многообразиям размерности строго меньше, чем размерность области распределения исследуемого объекта [2].

Естественно, представляют интерес спектральные задачи, соответствующие полупериодическим граничным задачам, для «существенно» нагруженных параболических уравнений в ограниченной области.

**Постановка задачи.** В области  $Q = \{x, t \mid 0 < x < 1, 0 < t < 2\pi\}$  рассматривается следующая спектральная задача:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -\alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=\bar{x}}, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = u(x, 2\pi), \end{cases} \quad (1)$$

где  $\alpha \in C$  – спектральный параметр,  $a = 1 - 2\bar{x}$ ,  $\bar{x} \in (0, 1)$  – задано.

Будем искать ненулевые решения задачи (1) в виде

$$u(x, t) = \sum_{s \in J} u_s(x) e^{ist}, \quad \text{где } s \in J,$$

тогда для искомым Фурье-коэффициентов  $u_s(x)$  получим следующую краевую задачу для нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} is u_s(x) - u_s''(x) = -\alpha u_s''(\bar{x}), & x \in (0,1), \\ u_s(0) = u_s(1) = 0, & is = \lambda^2, \end{cases} \quad \forall s \in J. \quad (2)$$

Используя функцию Грина и считая временную известную правую часть уравнения (2), запишем представление решения этой задачи:

$$u_s(x) = -\alpha u_s''(\bar{x}) \left[ \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2 \operatorname{ch} \lambda/2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\lambda}{2} (1-2x) \right], \quad \forall s \in J \setminus \{0\}. \quad (3)$$

Для определения неизвестной величины  $u_s''(\bar{x})$  продифференцируем равенство (3) по переменной  $x$  дважды и, полагая  $x = \bar{x}$ , получаем

$$u_s''(\bar{x}) \cdot \left[ 1 - \alpha \frac{\operatorname{ch} \lambda/2 (1-2\bar{x})}{\operatorname{ch} \lambda/2} \right] = 0. \quad (4)$$

Таким образом, отыскание нетривиальных решений задачи (1) свелось к исследованию разрешимости уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \alpha \operatorname{ch} az, & (5) \\ z \in Z_0 &= \{z \mid z \in C, z = x(1 \pm i), x = (|s|/8)^{1/2}, \\ & s \in J\}, \quad \alpha \in C, \end{aligned}$$

так как по условию  $u_s''(\bar{x}) \neq 0$ .

Прежде всего, покажем, что для любых  $\alpha \in C, a \in (-1,1)$  уравнение  $\operatorname{ch} z = \alpha \operatorname{ch} az$  на множестве  $Z_0$  имеет не более одного решения.

1. Пусть  $a = 0$ . Тогда исследуемое уравнение принимает вид

$$\operatorname{ch} z = \alpha. \quad (6)$$

Введем следующее представление числа  $\alpha$ :

$$\alpha = \operatorname{ch} b, \quad b = b_1 \pm ib_2, \quad b_j \in R^1, \quad j = 1,2. \quad (7)$$

Заметим, во-первых, что числа  $b$  определяются неоднозначно, с точностью до чисто мнимого слагаемого  $i2\pi k, k = 0,1,2,\dots$ , во-вторых, в формуле (7) имеет место либо случай знака «+» либо «-». Таким образом, из (6) и (7) мы получаем уравнение

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} b, \quad (8)$$

решениями которого являются корни:  $z_l^\pm = b_1 + i(\pm b_2 + 2\pi l), l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Только в четырех

случаях среди этих корней найдутся числа из множества  $Z_0$ : 1)  $b_1 = b_2$ , значит  $l = 0$ ; 2)  $b_1 = -b_2$ , значит  $l = 0$ ; 3)  $b_1 \neq b_2$ , но существует число  $\bar{l}_+$ :  $b_1 = b_2 + 2\pi \bar{l}_+$ ; 4)  $b_1 \neq -b_2$ , но существует число  $\bar{l}_-$ :  $b_1 = -b_2 + 2\pi \bar{l}_-$ . Во всех случаях искомые корни имеют вид  $z^\pm = b_1(1 \pm i) \in Z_0$ , а соответствующие этим корням числа  $b$  имеют представления  $b = b_1(1 \pm i)$ . В противном случае уравнение (8) на множестве  $Z_0$  не имеет корней!

Итак, доказано следующее

**Утверждение 1.** Уравнение (6) имеет единственное решение  $z^\pm = b_1(1 \pm i) \in Z_0$  (либо со знаком плюс, либо со знаком минус) тогда и только тогда, когда число  $b$  имеет представление  $b = b_1(1 \pm i)$ . В противном случае уравнение (6) не имеет решения на множестве  $Z_0$ .

2. Пусть  $a \neq 0$ . Тогда исследуемое уравнение имеет вид

$$\operatorname{ch} z = \alpha \operatorname{ch} az. \quad (9)$$

Введем комплексное число  $c$ , такое, что

$$\operatorname{ch} z = \alpha \operatorname{ch} az = \operatorname{ch} c,$$

$$\text{где } c = c_1 + ic_2, \text{ либо } c = c_1 - ic_2, \quad (10)$$

т.е. из (10) получаем систему, состоящую из двух следующих уравнений:

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} c, \quad \operatorname{ch} az = \operatorname{ch} d \equiv \frac{\operatorname{ch} c}{\alpha},$$

$$\text{где } d = d_1 + id_2, \text{ либо } d = d_1 - id_2. \quad (11)$$

Очевидно, что здесь числа  $c, d$  задаются с точностью до чисто мнимого слагаемого  $i2\pi k, k = 0,1,2,\dots$  Кроме того, отметим, что каждому корню уравнения (11) соответствует свое число  $c$  (и подходящее для этого  $c$  число  $d$ ).

Решая каждое из уравнений (11), находим соответствующие единственные решения из множества  $Z_0$ :  $z_1^\pm = c_1(1 \pm i), z_2^\pm = \frac{d_1}{a}(1 \pm i)$ . Эти корни могут совпадать только при выполнении условия:

$$c_1 = \frac{d_1}{a}, \quad (12)$$

т.е. только при выполнении условия (12) уравнение (9) на множестве  $Z_0$  имеет единственное решение, в противном случае уравнение (9) на множестве  $Z_0$  не имеет решения!

С другой стороны, из соотношений (11) получаем, что параметр  $\alpha$  может принимать только следующие значения:

$$\alpha = \frac{\operatorname{ch} c_1(1+i)}{\operatorname{ch} a c_1(1+i)}, \text{ либо } \alpha = \frac{\operatorname{ch} c_1(1-i)}{\operatorname{ch} a c_1(1-i)}.$$

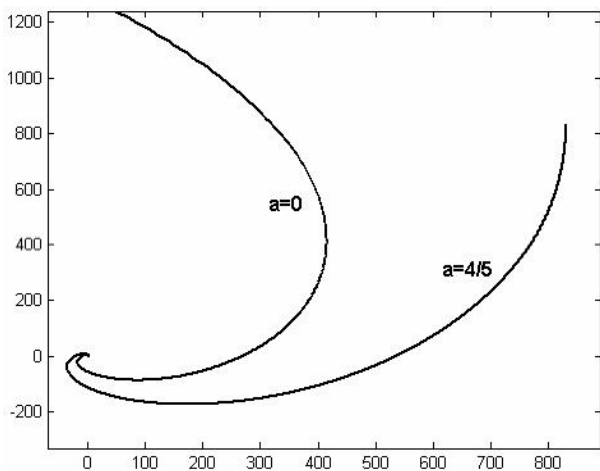
Наконец, учитывая дискретность в определении множества  $Z_0$ , окончательно получаем

**Утверждение 2.** Уравнение (9) имеет единственное решение  $z^\pm = c_1(1 \pm i)$  (либо со знаком плюс, либо со знаком минус) тогда и только тогда, когда

$$\alpha = \frac{\operatorname{ch} c_1(1 \pm i)}{\operatorname{ch} a c_1(1 \pm i)}, \quad (13)$$

где  $c_1 \in G = \{c | c = (|s|/8)^{1/2}, s = 0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$

Графики кривых в комплексной плоскости (для двух значений параметра  $a$ , а именно для  $a = 0, a = 4/5$ ), на которых расположены точки, координаты которых определяются комплексным числом  $\alpha$ , приведены на следующем рисунке. Отметим, что на этом рис. представлены графики только для неотрицательных  $s$ . Для отрицательных значений  $s$  данные графики дополнятся своими зеркальными отображениями относительно вещественной оси. Далее, если точка, соответствующая числу  $\alpha$ , лежит вне кривой для  $a = 4/5$ , то уравнение (9) при  $a = 4/5$  не имеет решения на множестве  $Z_0$ . Это означает, что ядро нагруженного оператора нульмерно. Если же точка комплексной плоскости  $\alpha$  лежит на кривой для  $a = 4/5$  и ее координаты определяются согласно формуле (13), где  $c_1 \in G$ , то уравнение (9) при  $a = 4/5$  имеет единственное решение на множе-



Кривые, на которых расположены точки спектра

стве  $Z_0$ , определяемое как  $z^+ = c_1(1+i)$  (для положительных  $s$ ), т.е. в этом случае ядро нагруженного оператора одномерно! Это же остается справедливым и для отрицательных  $s$ .

Таким образом показана справедливость следующей теоремы

**Теорема.** Спектральная задача (1) имеет счетный точечный спектр, расположенный на кривой комплексной плоскости

$$\alpha_{\{s \geq 0\}} = \frac{\operatorname{ch} c_1(1+i)}{\operatorname{ch} a c_1(1+i)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\alpha_{\{s < 0\}} = \frac{\operatorname{ch} c_1(1-i)}{\operatorname{ch} a c_1(1-i)}, \quad s = -1, -2, \dots; \quad (**)$$

где  $c_1 \in G = \{c | c = (|s|/8)^{1/2}, s = 0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$ , соответствующей заданному значению параметра  $a = 1 - 2\bar{x}$ . Собственные функции имеют вид:

$$u_s(x, t) = \frac{1}{is} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{(1-2x)\sqrt{is}}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{is}}{2}} \right) e^{ist}, \quad s \in J,$$

$$u_0(x, t) = x(1-x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, 1995.
2. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. О граничных задачах для «существенно» нагруженных параболических уравнений в неограниченных областях. I (одномерный случай) // Доклады АМАН. Нальчик, 2004. Т. 7, №1. С. 32–36.

Резюме

Шектелген облыста “елеулі” жүктелген параболалық теңдеу үшін қарастырылған жалпыланған спектралдық есептің сандық нүктелі спектрі бар екені көрсетілген.

Summary

There is shown, that the spectral problem for parabolic equation “essentially loaded on a spatial variable in the limited area has counting the dot spectrum located on rigorously the described curve complex plane of values of spectral parameter.

УДК 517.956

Институт математики МОН РК,  
г. Алматы

Поступила 3.05.06г.