М. О. САТКАЛИЕВА

СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО НАПРАВЛЯЮЩЕГО МЕХАНИЗМА VI КЛАССА ПО ЗАДАННЫМ ПОЛОЖЕНИЯМ ВЫХОДНОЙ ТОЧКИ ШАТУНА

Рассмотрим задачу синтеза пространственного механизма VI класса общего вида в соответствии с рисунком по заданным положениям входного звена 1 и выходной точки T звена 3

$$\varphi_{1i} = \varphi_1(t_i) \text{ и } X_{Ti} = X_T(t_i),$$

$$Y_{Ti} = Y_T(t_i),\ Z_{Ti} = Z_T(t_i), \quad i = \overline{1,4}. \tag{1}$$

Решение задачи синтеза механизма проведено с использованием метода интерполирования. Для решения задачи синтеза кинематической цепи ABCD механизма по заданным положениям звена 3 (BC)[1], в котором приближающая окружность точки C радиусом $l_{CD} = l_{4\phi}$ с центром в точке D звена 4 (CD) определяется как линия пересечения сферы с координатами X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1} и плоскости, удобно использовать выражения взвешенных разностей [2]:

$$\Delta q = l_4^2 - l_{4\phi}^2, \tag{2}$$

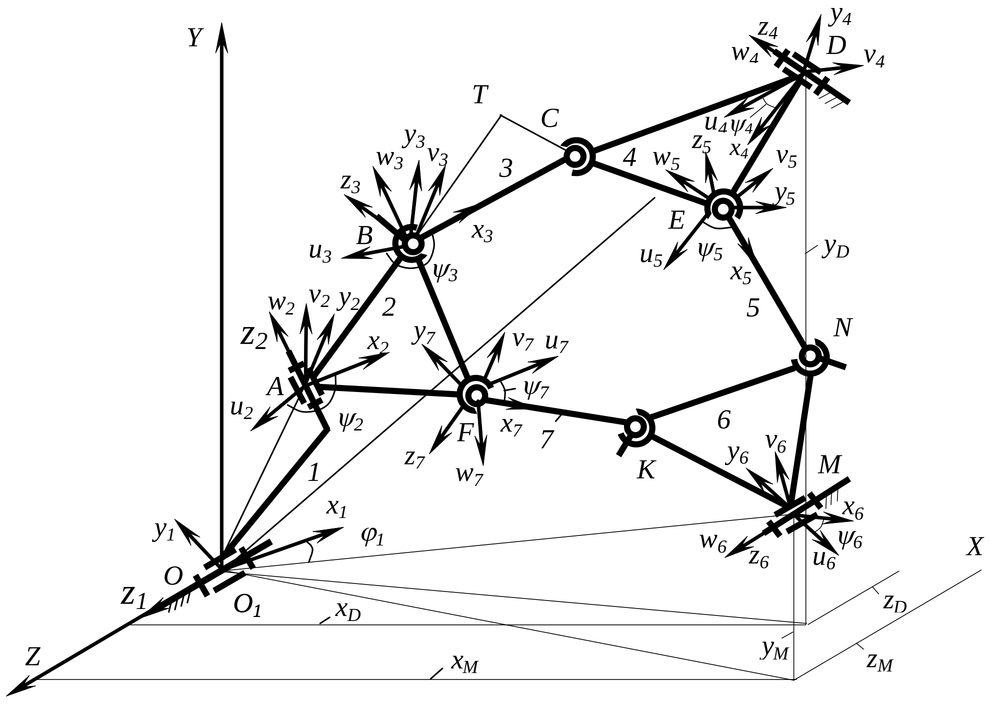
$$\Delta q_i = a x_{3Ci} + b y_{3Ci} + c z_{3Ci} - 1 = 0, \tag{3}$$

где $l_{4\phi}$ – расстояния между точками C звена 3 и D_1;

$$l_{4\phi}^2 = (X_{D1} - X_{Ci})^2 + (Y_{D1} - Y_{Ci})^2 + (Z_{D1} - Z_{Ci})^2, \tag{4}$$

a, b, c – коэффициенты уравнения приближающей плоскости; X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, X_{Ci}, Y_{Ci}, Z_{Ci} – соответствующие координаты точек D_1 (центра сферы) и C в абсолютной системе координат $OXYZ$. По условию синтеза координаты точки C звена 3, которому принадлежат локальные координаты выходной точки T, в абсолютной системе координат $OXYZ$ определяются с использованием обобщенного метода символических обозначений преобразования координат [3] в виде

$$X_C = x_{3C}\cos(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) +$$
$$+ z_{3C}\sin(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + X_C^{'},$$
$$Y_C = x_{3C}\sin(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) -$$
$$- z_{3C}\cos(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + Y_C^{'},$$
$$Z_C = y_{3C}\cos\beta_3 + Z_C^{'}, \tag{5}$$



где

$$X_C^{'} = a_{2,1}\cos\varphi_1 + a_{3,2}\cos(\varphi_1 + \psi_2),$$
$$Y_C^{'} = a_{2,1}\sin\varphi_1 + a_{3,2}\sin(\varphi_1 + \psi_2),$$
$$Z_C^{'} = c_{21} + b_{21} + b_{32}\cos\alpha_{21}.$$

Синтезу подлежат 10 неизвестных геометрических параметров кинематической цепи *ABCD* механизма. Из них 7 параметров: x_{3C}, y_{3C}, z_{3C}, X_D, Y_D, Z_D, l_{CD} – параметры синтезируемого звена 4 (*CD*) и 3 параметра X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1} – координаты центра сферы.

Вычисление четырех параметров рассмотрим на примере одного из вариантов: X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, l_{CD1}.

Выражение взвешенной разности (2) с учетом уравнений координат точки С запишем в виде обобщенного полинома:

$$\Delta q = p_1 f_1(\varphi_1,\psi_2) + p_2 f_2(\varphi_1,\psi_2) + p_3 f_3(\varphi_1,\psi_2) + p_4 f_4(\varphi_1,\psi_2) - F(\varphi_1,\psi_2), \quad (6)$$

где

$$p_1 = X_{D1}, \quad f_1(\varphi_1,\psi_2) = -2[x_{3C}\cos(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3)) + z_{3C}\sin(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3)) + X_C^{'}],$$

$$p_2 = Y_{D1}, \quad f_2(\varphi_1,\psi_2) = -2[x_{3C}\sin(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3)) - z_{3C}\cos(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3)) + Y_C^{'}],$$

$$p_3 = Z_{D1}, \quad f_3(\varphi_1,\psi_2) = -2(y_{3C}\cos\beta_3 + Z_C^{'}),$$

$$p_4 = X_{D1}^2 + Y_{D1}^2 + Z_{D1}^2 - l_{D1C,}^2 \quad f_4(\varphi_1,\psi_2) = 1,$$

$$F(\varphi_1,\psi_2) = -2x_{3C}[X_C^{'}\cos(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3)) + Y_C^{'}\sin(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3))] - 2y_{3C}\cos\beta_3 Z_C^{'} -$$
$$- 2x_{3C}[X_C^{'}\sin(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3)) - Y_C^{'}\cos(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3))] -$$
$$- 2x_{3C}z_{3C}\sin 2(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3)) -$$
$$-(x_{3C}^2 + y_{3C}^2 + z_{BC}^2) - (X_C^{'2} + Y_C^{'2} + Z_C^{'2}).$$

При решении задачи синтеза по методу интерполирования для четырех заданных положений механизма отклонения взвешенной разности должны равняться нулю. С учетом этого из выражения (6) имеем

$$p_1 f_1(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) + p_2 f_2(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) + p_3 f_3(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) + p_4 f_4(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) - F(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) = 0, \quad i = \overline{1,4}. \quad (7)$$

Уравнение представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров p_1, p_2, p_3, p_4. Решение этой системы имеет вид

$$\overline{p} = A^{-1}\overline{F}, \text{ если } \det A \neq 0. \quad (8)$$

Определим неизвестные геометрические параметры кинематической цепи *ABCD* механизма по формулам

$$X_{D1} = p_1, \quad Y_{D1} = p_2, \quad Z_{D1} = p_3,$$
$$l_{CD1} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4}.$$

Вычисление остальных четырех параметров проводим с использованием выражения взвешенной разности приближающей плоскости (3)

$$\Delta q_i = a x_{3Ci} + b y_{3Ci} + c\, z_{3Ci} - 1 = 0.$$

С учетом координат точки С запишем систему четырех уравнений в виде

$$aX_{C1} + bY_{C1} + cZ_{C1} = 1,$$
$$aX_{C2} + bY_{C2} + cZ_{C2} = 1,$$
$$aX_{C3} + bY_{C3} + cZ_{C3} = 1,$$
$$aX_{C4} + bY_{C4} + cZ_{C4} = 1. \quad (9)$$

Из первых трех уравнений определяем коэффициенты

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad c = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (10)$$

Подставляя выражения *a*, *b*, *c* в четвертое уравнение системы (9) и задавая значения x_{3C}, z_{3C}, получаем уравнение относительно неизвестного

$$y_{3C} = \frac{1 - aX_{Ci} - bY_{Ci} - cZ_{Ci}}{c\cos\beta_3}. \quad (11)$$

В частном случае, когда одна из двух подвижных систем координат принимается за неподвижную систему, совпадающую с абсолютной системой координат *OXYZ*, координаты x_D, $y_{D,}$ z_D (центра окружности) приравниваются к координатам точки *D*: X_D, Y_D, Z_D. Следовательно, основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы D_1 к плоскости, определяет координаты

X_D, Y_D, Z_D центра D приближающей окружности

$$X_D = X_{D1} + Q_x d,\quad Y_D = Y_{D1} + Q_x d,$$
$$Z_D = Z_{D1} + Q_x d\,, \qquad (12)$$

где $Q_x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $Q_y = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $Q_z = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ – направляющие косинусы оси вращательной пары в точке D звена 4;

$$d = \frac{aX_{D1} + bY_{D1} + cZ_{D1} - 1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (13)$$

Длина звена 4 (CD), т.е. радиус окружности, определяется по формуле

$$l_{CD\,\phi} = \sqrt{(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2 + (Z_D - Z_C)^2}\,. \qquad (14)$$

Таким образом, по четырем заданным положениям механизма определены восемь параметров: y_{3C}, a, b, c, l_{CD}, X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}.

Рассмотрим задачу синтеза пространственного механизма VI класса общего вида в соответствии с рис. по пяти заданным положениям входного звена 1 и выходной точки Т звена 3:

$$\varphi_{1i} = \varphi_1(t_i) \text{ и } X_{Ti} = X_T(t_i),$$
$$Y_{Ti} = Y_T(t_i),\ Z_{Ti} = Z_T(t_i),\quad i = \overline{1,5}. \qquad (15)$$

Вычисление пяти параметров рассмотрим на примере одного из вариантов: X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, y_{3C}, l_{CD1}.

Выражение взвешенной разности (2) с учетом уравнений координат точки С запишем в виде обобщенного полинома:

$$\Delta q = p_1 f_1(\varphi_1,\psi_2) + p_2 f_2(\varphi_1,\psi_2) + p_3 f_3(\varphi_1,\psi_2) +$$
$$+ p_4 f_4(\varphi_1,\psi_2) + p_5 f_5(\varphi_1,\psi_2) +$$
$$+ p_3 p_4 f_6(\varphi_1,\psi_2) - F(\varphi_1,\psi_2), \qquad (16)$$

где

$$p_1 = X_{D1},\quad f_1(\varphi_1,\psi_2) = -2[a_{2,1}\cos\varphi_1 +$$
$$+ a_{3,2}\cos(\varphi_1+\psi_2) + x_{BC}\cos(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3)) +$$
$$+ z_{BC}\sin(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3))],$$
$$p_2 = Y_{D1},\quad f_2(\varphi_1,\psi_2) =$$
$$= -2[a_{2,1}\sin\varphi_1 + a_{3,2}\sin(\varphi_1+\psi_2) +$$
$$+ x_{BC}\sin(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3)) +$$
$$+ z_{BC}\cos(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3))],$$
$$p_3 = Z_{D1},\quad f_3(\varphi_1,\psi_2) = -2Z_C^{'},$$
$$p_4 = y_{BC},\quad f_4(\varphi_1,\psi_2) = -2Z_C\cos\alpha_{21},$$
$$p_5 = X_{D1}^2 + Y_{D1}^2 + Z_{D1}^2 + y_{BC}^2 - l_{D1C}^2,$$
$$f_5(\varphi_1,\psi_2) = 1,$$
$$p_3 p_4 = y_{BC} Z_{D1},\quad f_6(\varphi_1,\psi_2) = -2\cos\alpha_{21},$$
$$F(\varphi_1,\psi_2) = -2x_{BC}[X_C^{'}\cos(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3)) +$$
$$+ Y_C^{'}\sin(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3))] -$$
$$-2z_{BC}[Y_C^{'}\cos(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3)) +$$
$$+ X_C^{'}\sin(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3))] -$$
$$-2z_{BC}x_{BC}\sin 2(\varphi_1 + (\psi_2+\psi_3)) -$$
$$-(x_{BC}^2 + z_{BC}^2 + X_C^{'2} + Y_C^{'2} + Z_C^{'2}).$$

При решении задачи синтеза по методу интерполирования для четырех заданных положений механизма отклонения взвешенной разности должны равняться нулю. С учетом этого из выражения (16) имеем

$$p_1 f_1(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) + p_2 f_2(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) + p_3 f_3(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) +$$
$$+ p_4 f_4(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) + p_5 f_5(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) +$$
$$+ p_3 p_4 f_6(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) - F(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) = 0,\quad i = \overline{1,5}. \qquad (17)$$

Решая систему уравнений (17) методом исключения неизвестных, получим квадратное уравнение относительно неизвестного p_4:

$$k_1 p_4^2 + k_2 p_4 + k_3 = 0\,. \qquad (18)$$

Решая уравнение (18), определяем геометрические параметры кинематической цепи $ABCD$ механизма по формулам:

$$X_{D1} = p_1,\quad Y_{D1} = p_2,\ Z_{D1} = p_3,\ y_{3C} = p_4,$$
$$l_{CD1} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - p_5}\,.$$

Вычисление остальных пяти параметров: $x_{3C}, z_{3C}, X_D, Y_D, Z_D$ проводим с использованием выражения взвешенной разности (3)

$$\Delta q_i = ax_{3Ci} + by_{3Ci} + cz_{3Ci} - 1 = 0\,,\ i = \overline{1,5}\,. \quad (19)$$

Из трех уравнений определяем коэффициенты $a = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $b = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $c = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

Для решения задачи синтеза указанных пяти параметров составляем систему трех алгебраических уравнений, состоящих из двух уравнений системы (19) и квадратного уравнения (18). После соответствующих преобразований получим

$$T_4(z^0)x^4 + T_3(z\ \ )x^3 + T_2(z^2)x^2 +$$

$$+T_1(z^3)x\ \ + T_0(z^4) = 0\,,$$

$$S_6(z^0)x^6 + S_5(z\ \ )x^5 + S_4(z^2)x^4 + S_3(z^3)x^3 +$$

$$+S_2(z^4)x^2 + S_1(z^5)x\ \ + S_0(z^6) = 0, \quad (20)$$

где $x = x_{3C}$, $y = y_{3C}$, $z = z_{3C}$.

Система уравнений содержит неизвестные x и z. Исключая неизвестное x, получаем алгебраическое уравнение 24 степени относительно неизвестного z. Решая данное уравнение, находим вещественные решения относительно неизвестного, число которых определяется по теореме Штурма. Для положительных вещественных значений неизвестного z определяем значения остальных неизвестных $x = x_{3C}$, $y = y_{3C}$. Аналогично, как показано выше, устанавливаются координаты центра приближающей плоскости

$$X_D = X_{D1} + Q_x d,\ Y_D = Y_{D1} + Q_x d,$$

$$Z_D = Z_{D1} + Q_x d\,.$$

Длина звена 4 (CD), т.е. радиус окружности, определяется по формуле

$$l_{CD\,ф} = \sqrt{(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2 + (Z_D - Z_C)^2}.$$

Таким образом, по пяти заданным положениям механизма найдены десять параметров: x_{3C}, y_{3C}, z_{3C}, X_D, Y_D, Z_D X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, l_{CD}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зиновьев В.А.* Пространственные механизмы с низшими парами. М.: Гостехиздат, 1952. 432 с.

2. *Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А.* Синтез плоских механизмов. М.: Госиздат, 1959. 1084с.

3. *Шет и Уикер мл.* Обобщенная система символических обозначений механизмов // Конструирование и технология машиностроения. 1971. №1. С. 96-106.

Резюме

VI класты кеңістікті бағыттаушы механизмнің шатун буынының шығыс нүктесінің берілген төрт және бес жағдайына байланысты, интерполяция тәсіліне сүйене отырып, геометриялық параметрлерінің синтез есебі шешілген.

Summary

The task of synthesis of geometrical parameters of a spatial guide link mechanism of VI class upon four and five preset positions of output point of connecting rod using the interpolation method is solved.

Поступила 4.09.06г.