М.М. АМАНГАЛИЕВА, А.Е. ТУЙМЕБАЕВА

О СПЕКТРЕ ОДНОГО ОСОБОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА. ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Постановка задач. На вещественной полуоси $R_+ = (0,+\infty)$ рассматриваются вопросы спектра следующего интегрального уравнения:

$$\mathrm{K}_\lambda \mu \equiv (I - \lambda \mathrm{K})\mu \equiv \mu(t) -$$

$$-\lambda \int_0^\infty k\left(\frac{\tau}{t}\right)\mu(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = 0,\ t \in R_+, \qquad (1)$$

и его сопряженного

$$\mathrm{K}_\lambda^* \nu \equiv (I - \lambda \mathrm{K}^*)\nu \equiv \nu(t) -$$

$$-\bar{\lambda} \int_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right)\nu(\tau)\frac{d\tau}{t} = 0,\ t \in R_+, \qquad (2)$$

где ядро $k(z)$ определено соотношением

$$k(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}} \exp\left(-\dfrac{1}{4(1-z)}\right), & 0 < z < 1, \\ 0, & 1 \le z < +\infty; \end{cases} \qquad (3)$$

$\lambda \in C$ – спектральный параметр.

Решения уравнений (1) и (2), соответственно ищутся в классах:

$$e^{-t}\mu(t) \in L_1(R_+),\ e^t \nu(t) \in L_\infty(R_+). \qquad (4)$$

Заметим, что в уравнениях (1) и (2) ядро интегрального оператора $k(z)$ обладает следующими свойствами:

1^0. $\forall z \in [0,1]$ ядро $k(z) \ge 0$ и непрерывно.

2^0.Для каждого $z_0 \ge \varepsilon > 0$: $\lim\limits_{z \to +z_0} \int_{z_0}^{z} k(z)dz = 0$.

3^0. Норма интегрального оператора, определяемого ядром $k(z)$ и действующего в пространстве суммируемых функций, равна $\operatorname{erfc}(1/2) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{1/2}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \ne 0$.

Свойство 3^0 определяет особенность рассматриваемого интегрального уравнения (1), так как для него метод последовательных приближений неприменим!

Отметим, что необходимость исследования особых интегральных уравнений вида (1) возникает, например, при изучении некоторых нелокальных внутренне граничных задач для параболического уравнения [1], спектрально-нагруженных параболических уравнений [2–4], задач с подвижной границей [5] и обратных задач для параболических уравнений и т.д.

2. Применяя к уравнению (1) преобразование Меллина [6, с.161], с учетом теоремы о свертке получаем

$$\mu(s)\cdot\left[1-\lambda k(s)\right] = 0,\ s \quad s_1+is_2$$

где
$$\mu(s)=\int_0^{\infty}\mu(\tau)\tau^{s-1}d\tau,\quad \mathrm{Re}\,s<1,$$

– изображение функции $\mu(t)$, а изображение ядра имеет вид

$$k(s)=\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{4(1-z)}\right)\ z^{-s-1}dx,$$

$$\mathrm{Re}\,s<0. \qquad (5)$$

Наличие и вид собственных функций интегрального уравнения (1) определяются наличием и количеством корней, следующего трансцендентного уравнения относительно комплексного параметра s:

$$1-\lambda k(s)\quad 0,\ \ \mathrm{Re}\,s<0\ (s \quad s_1+is_2) \qquad (6)$$

Утверждение. Каждому $\lambda\in\{\lambda\in C,\ \mathrm{Re}\,\lambda>0\}$ соответствует единственный корень s уравнения (6), для которого $\mathrm{Re}\,s<0$. При $\mathrm{Re}\,\lambda=0$ и $\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$ корень s уравнения (6) будет удовлетворять условиям $\mathrm{Re}\,s=s_1=0$ и $\mathrm{Im}\,s=s_2\neq 0$. Если же $\lambda\to 0$, то и корень уравнения (6) $s\to 0$. В частности, каждому действительному значению $\lambda\in R_+$ соответствует единственный действительный корень $s\in R_+$ уравнения (6).

Итак, факт о существовании и виде собственных функций интегрального оператора уравнения (1) показывает

Предложение 1. Если $\mathrm{Re}\,\lambda\geq 0$, то однородное интегральное уравнение (1) имеет собственные функции вида

$$\mu_*(t)=t^{-s^*},$$

где s^* – является корнем уравнения (6)

$$1-\lambda k(s)=0.$$

Если же $\mathrm{Re}\,\lambda<0$, то однородное уравнение (1) имеет только тривиальное решение.

Сформулируем полученный результат применительно к спектральной задаче для интегрального уравнения (1).

Теорема 1. Для интегрального оператора K из (1) множество $\sigma(\mathrm{K})\equiv\{\lambda\,|\,\lambda\in C,\ \mathrm{Re}\,\lambda\geq 0\}$ является множеством характеристических чисел, а $C\setminus\sigma(\mathrm{K})$ – резольвентным множеством.

Теперь перейдем к исследованию однородного сопряженного интегрального уравнения (2):

$$\nu(t)-\overline{\lambda}\int_0^{\infty}k\left(\frac{t}{\tau}\right)\nu(\tau)\frac{d\tau}{t}=0,\qquad t\in R_+.$$

Если в уравнении (2) произвести замены: $t=t_1^{-1}$, $\tau=\tau_1^{-1}$ – и ввести следующее обозначение: $\nu_1(t_1)=t_1^{-1}\nu(t_1^{-1})\cdot t_1^{-1}$, то оно преобразуется к виду

$$\nu_1(t_1)-\overline{\lambda}\int_0^{\infty}k\left(\frac{\tau_1}{t_1}\right)\nu_1(\tau_1)\frac{d\tau_1}{\tau_1}=0,$$

т.е. оно совпадает с интегральным уравнением (1), где неизвестной функцией выступает функция $\nu_1(t_1)$. Итак, мы установили

Предложение 2. Однородное интегральное уравнение (2) для $\forall\lambda\in C$, $\mathrm{Re}\,\lambda<0$ имеет только тривиальное решение. Если же $\mathrm{Re}\,\lambda>0$, то однородное интегральное уравнение (2) имеет одну собственную функцию вида $\nu_{2s^{(0)}}(t)=t^{s^{(0)}}$, где $s^{(0)}$ – корень трансцендентного уравнения (5), причем $\mathrm{Re}\,s^{(0)}<0$. Это означает, что однородное сопряженное уравнение (2) имеет собственные функции только вида $\nu_{s^{(0)}}(t)=e^t t^{s_0}$, $\mathrm{Re}\,s_0<0$, которые, очевидно, не принадлежат пространству $L_\infty(R_+)$. Таким образом, в пространстве $L_\infty(R_+)$ однородное интегральное уравнение (2) для $\forall\lambda\in C$ имеет только тривиальное решение.

Сформулируем полученный результат применительно к спектральной задаче для интегрального уравнения (2).

Теорема 2. Для интегрального оператора K^* из (2) вся комплексная плоскость является резольвентным множеством.

Приложения. Следующие нелокальные задачи:

$$
\begin{cases}
u_{1t}(x,t) - u_{1xx}(x,t) = f_1(x,t), \\
\{x,t\} \in R_+ \times R_+, \quad u_1(x,0) = 0, \\
u_1(0,t) = \lambda u_1(x,t)\big|_{x=\sqrt{t}},
\end{cases} \tag{7}
$$

$$
\begin{cases}
u_{2t}(x,t) - u_{2xx}(x,t) = f_2(x,t), \\
\{x,t\} \in R_+ \times R_+, \quad u_2(x,0) = 0, \\
u_{2x}(0,t) = \lambda u_{2x}(x,t)\big|_{x=\sqrt{t}}
\end{cases} \tag{8}
$$

и соответствующие сопряженные граничные задачи для (7) и (8):

$$
\begin{cases}
-v_{1t}(x,t) - v_{1xx}(x,t) - \bar{\lambda}\delta\left(x-\sqrt{t}\right) \otimes v_{1x}(0,t) = g_1(x,t), \\
v_1(x,\infty) = 0, v_1(0,t) \quad v_1(\infty,t) = 0, v_{1x}(\infty,t) = 0;
\end{cases} \tag{9}
$$

$$
\begin{cases}
-v_{2t}(x,t) - v_{2xx}(x,t) - \bar{\lambda}\delta'_x\left(x-\sqrt{t}\right) \otimes v_2(0,t) = g_2(x,t), \\
v_2(x,\infty) = 0, \ v_{2x}(0,t) \quad v_{2x}(\infty,t) = v_2(\infty,t) = 0;
\end{cases} \tag{10}
$$

где $\lambda \in C$ – спектральный параметр, сводятся к изучению интегральных уравнений, которые в точности совпадают с уравнениями (1) и (2).

Следует отметить, что рассматриваемые в работе интегральные уравнения типа Вольтерра возникают при исследовании прикладных задач в областях с подвижными границами [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И., Туймебаева А.Е.* Спектрально-нагруженный оператор теплопроводности. Автомодельный закон движения точки нагрузки. Препринт №6. Алматы, 2006. 40с.

2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М., 1995.

3. *Дженалиев М.Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, 1995.

4. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Об одной граничной задаче для нагруженного параболического уравнения // Материалы международного российско-казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы современного анализа и информатики». Нальчик, 2004. С. 62–65.

5. *Харин С.Н.* Тепловые процессы в электрических контактах и связанные с ними сингулярные интегральные уравнения: Автореф. дис. …канд.физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1968.

6. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. М., 1975.

Резюме

Ерекше Вольтерра интегралдық теңдеуі үшін оң жақты жарты жазықтық – спектр, ал сол жақты жарты жазықтық – резолвенталық жиын болатыны анықталған.

Summary

There is established, that all right half plane together with an imaginary axis is a spectrum, and left half plane is resolvent set for the special integral equation.

УДК 517.956

Институт математики МОН РК,
г. Алматы

Поступила 04.02.2006 г.