С. А. ЖАПБАРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ПРОБНОГО ТЕЛА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ШАРООБРАЗНОГО ЦЕНТРАЛЬНОГО И ВНЕШНЕГО ТЕЛА ВТОРЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

Пусть пробное тело совершает движение в поле тяготения центрального шарообразного тела и внешнего возмущающего тела. Введем неподвижную сферическую систему координат ρ, ψ, λ с началом в центре масс центрального тела, Тогда силовую функцию задачи можно аппроксимировать силовой функцией Хилла [1]

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\nu\rho^2 - \frac{3}{2}\nu\rho^2\sin^2\psi . \qquad (1)$$

С учетом силовой функции (1) дифференциальные уравнения движения пробного тела имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\dot\rho}{dt} - \rho\dot\psi^2 - \rho\dot\lambda^2\cos^2\psi = -\frac{\mu}{\rho^2} + \nu\rho - 3\nu\rho\sin^2\psi,\\
&\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot\lambda\cos^2\psi\right) = 0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot\psi\right) + \rho^2\dot\lambda^2\cos\psi\sin\psi = -3\nu\rho^2\sin\psi\cos\psi,
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где μ – произведение постоянной тяготения на сумму масс центрального и пробного тела; ν – постоянный параметр.

Дифференциальные уравнения движения (2) допускают интеграл площадей и интеграл энергии

$$F_1 = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\psi^2 + \rho^2\dot\lambda^2\cos^2\psi - \frac{2\mu}{\rho} - \nu\rho^2 + 3\nu\rho^2\sin^2\psi = h_1,$$

$$F_2 = \rho^2\dot\lambda\cos^2\psi = h_2 . \qquad (3)$$

Также дифференциальные уравнения (2) при условии

$$\mu = \left(\nu + \omega^2\right)\rho_0^3, \qquad \psi = 0$$

допускают частное круговое движение

$$\rho = \rho_0, \qquad \dot\lambda = \omega . \qquad (4)$$

Принимая (4) за невозмущенное движение, введем возмущения по формулам

$$\rho = \rho_0 + x_1, \quad \dot\rho = x_2, \quad \psi = x_3, \quad \dot\psi = x_4, \quad \dot\lambda = \omega + x_5 . \qquad (5)$$

Используя (5), перепишем (3):

$$F_1 = x_2^2 + \left(\rho_0 + x_1\right)^2 x_4^2 + \left(\rho_0 + x_1\right)^2\cos^2 x_3\left(\omega + x_5\right)^2 - \frac{2\mu}{\left(\rho_0 + x_1\right)} - \nu\left(\rho_0 + x_1\right)^2 + 3\nu\left(\rho_0 + x_1\right)^2\sin^2 x_3 = h_1. \qquad (6)$$

$$F_2 = \left(\rho_0 + x_1\right)^2\cos^2 x_3\left(\omega + x_5\right) = h_2 . \qquad (7)$$

Используя линейную связку интегралов Н. Г. Четаева, построим функцию Ляпунова [2]:

$$V = F_1 - F_1(0) + \lambda\left[F_2 - F_2(0)\right] + \chi\left[F_2^2 - F_2^2(0)\right]. \qquad (8)$$

Подставив в (8) выражения (6) и (7), будем иметь:

$$V = \Big[x_2^2 + \left(\rho_0 + x_1\right)^2 x_4^2 + \left(\rho_0 + x_1\right)^2\left(\omega + x_5\right)^2\cos^2 x_3 - \frac{2\mu}{\left(\rho_0 + x_1\right)} - \nu\left(\rho_0 + x_1\right)^2 + 3\nu\left(\rho_0 + x_1\right)^2\sin^2 x_3 - \rho_0^2\omega^2 + \frac{2\mu}{\rho_0} + \nu\rho_0^2\Big] + \lambda\Big[\left(\rho_0 + x_1\right)^2\left(\omega + x_5\right)\cos^2 x_3 - \rho_0^2\omega\Big] + \chi\Big[\left(\rho_0 + x_1\right)^4\left(\omega + x_5\right)^2\cos^4 x_3 - \rho_0^4\omega^2\Big]. \qquad (9)$$

Выполним следующие разложения в ряд Маклорена в окрестности $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ и сохраним члены порядка $O\left(x_i^2\right)$:

$$\left(\rho_0 + x_1\right)^2 x_4^2 = \rho_0^2 x_4^2 + \ldots,$$

$$\cos^2 x_3 = 1 - x_3^2 + \ldots, \quad \cos^4 x_3 = 1 - 2x_3^2 \ldots,$$

$$-\frac{2\mu}{\left(\rho_0 + x_1\right)} = -2\nu\rho_0^2 + 2\nu\rho_0 x_1 - 2\nu x_1^2 - 2\omega^2\rho_0^2 + 2\omega^2\rho_0 x_1 - 2\omega^2 x_1^2 + \ldots,$$

$$(\rho_0+x_1)^2(\omega+x_5)^2\cos^2 x_3 =$$
$$=\rho_0^2\omega^2+2\omega\rho_0^2x_5+\rho_0^2x_5^2+2\rho_0\omega^2x_1+$$
$$+4\rho_0\omega\, x_1x_5+\omega^2x_1^2-\omega^2\rho_0^2x_3^2+\dots,$$

$$-\nu(\rho_0+x_1)^2=-\nu\rho_0^2-2\nu\rho_0x_1-\nu x_1^2,$$

$$3\nu(\rho_0+x_1)^2\sin^2 x_3=3\nu\rho_0^2x_3^2+\dots,$$

$$(\rho_0+x_1)^2(\omega+x_5)\cos^2 x_3=$$
$$=\rho_0^2\omega+2\rho_0\omega\, x_1+x_1^2\omega-\rho_0^2\omega x_3^2+$$
$$+\rho_0^2x_5+2\rho_0x_1x_5+\dots,$$

$$(\rho_0+x_1)^4(\omega+x_5)^2\cos^4 x_3=$$
$$=\rho_0^4\omega^2+4\rho_0^3\omega^2x_1+6\rho_0^2\omega^2x_1^2+2\rho_0^4\omega\, x_5-$$
$$-2\rho_0^4\omega^2x_3^2+\rho_0^4x_5^2+8\rho_0^3\omega\, x_1x_5+\dots$$

Подставив эти разложения в (9), найдем

$$V=\left[-3(\nu+\omega^2)+4\chi\rho_0^2\omega^2\right]x_1^2+x_2^2+$$
$$+\rho_0^2(\omega^2+3\nu)x_3^2+\rho_0^2x_4^2+$$
$$+\rho_0^2(1+\rho_0^2\chi)x_5^2+2(2\chi\rho_0^3\omega)x_1x_5+\dots$$

Разобьем V на части V_1 и V_2:

$$V_1=x_2^2+\rho_0^2(\omega^2+3\nu)x_3^2+\rho_0^2x_4^2,$$
$$V_2=\left[-3(\nu+\omega^2)+4\chi\rho_0^2\omega^2\right]x_1^2+$$
$$+2(2\chi\rho_0^3\omega)x_1x_5+\rho_0^2(1+\rho_0^2\chi)x_5^2.$$

Здесь V_1 – определенно положительна.

Исследуем V_2

$$\Delta_1=\left[-3(\nu+\omega^2)+4\chi\rho_0^2\omega^2\right]>0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-3\nu-3\omega^2+4\chi\omega^2\rho_0^2 & 2\chi\rho_0^3\omega\\ 2\chi\rho_0^3\omega & \rho_0^2+\rho_0^4\chi\end{vmatrix}>0.$$

Разложив Δ_2, имеем

$$\chi(\omega^2-3\nu)\rho_0^2-3(\nu+\omega^2)>0,$$

отсюда

$$\chi>\frac{3(\nu+\omega^2)}{\rho_0^2(\omega^2-3\nu)}. \qquad (10)$$

Проверим, будет ли $\Delta_1>0$ при условии (10), для этого положим

$$\chi>\frac{3(\nu+\omega^2)}{\rho_0^2(\omega^2-3\nu)}+q, \qquad q>0. \qquad (11)$$

Поставим (11) в Δ_1

$$\Delta_1=4\rho_0^4q\omega^2(\omega^2-3\nu)+$$
$$+9\nu\rho_0^2(\omega^2-\nu)+9\rho_0^2\omega^2(\nu+\omega^2)>0.$$

Здесь $\omega^2>3\nu$, следовательно $\Delta_1>0$ при любом $q\geq 1$.

В результате функция Ляпунова V при условии (11) определенно положительна. С другой стороны, F_1 и F_2 являются первыми интегралами и $\dot V\equiv 0$, следовательно, все условия теоремы Ляпунова об устойчивости выполнены и невозмущенное движение устойчиво относительно переменных $\rho, \dot\rho, \psi, \dot\psi, \dot\lambda$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шинибаев М.Д.* Поступательное движение пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения. Алматы: РИО ВАК РК, 2001. 128 с.

2. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.

Резюме

Пассив гравитациялық дененің шар секілді және сыртқы ұйытқушы дененің күш өрісіндегі шеңберлік қозғалыстарының орнықтылығы Ляпуновтың екінші әдісімен зерттелген. Шеңберлік қозғалыстардың орнықты болу шарттары анықталған.

Summary

The stability circular movement of tested body in the sphere of gravity as a ball figure of central and the exterior body of the second method of Lyapunov is researched in this article. The conditions of existence and the stability of circular movement of testing body not in the central body of gravity is found.

УДК 531.1

Поступила 10.12.06г.