Н.И. МАРТЫНОВ

СОБСТВЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЕЙСМИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Известно, что сейсмический маятник является “приемником”, “индикатором” и “спектральным анализатором” сейсмических волн. Было установлено, что маятник откликается на готовящееся землетрясение от нескольких суток до нескольких часов в виде существенных вариаций периода и амплитуды крутильных колебаний. Он используется для выделения предвестников готовящегося землетрясения. Наиболее глубокое качественное исследование этого явления и смежных с ним вопросов дано в работах И.И. Калинникова [1–3]. Вместе с тем следует отметить отсутствие теории колебаний сейсмического маятника. В настоящее время такая теория интенсивно разрабатывается [4].

В данной работе исследуются собственные нелинейные колебания сейсмического маятника. Собственные колебания являются важной, неотъемлемой составной частью общих колебаний, без исследования которых не может быть построена общая теория колебаний.

Собственные затухающие колебания сейсмического маятника

Реальные системы не консервативны. Процесс диссипации энергии в них существенно влияет на их движение. Уравнения движения затухающих колебаний сейсмического маятника приведены в [4]. В безразмерных переменных они имеют вид

$$\dot{\bar{q}}_1 = \left(1 - \frac{\mu^2 \bar{q}_1^2}{4}\right)\bar{\mathrm{P}}_1,\quad \dot{\bar{q}}_2 = \frac{\bar{\mathrm{P}}_2}{a} - \frac{\mu}{2}\bar{\mathrm{P}}_3,$$

$$\dot{\bar{q}}_3 = \frac{\mu}{4}\left(\bar{\mathrm{P}}_3 - 2\bar{\mathrm{P}}_2\right) + \frac{\bar{\mathrm{P}}_3}{\bar{q}_1^2}, \tag{1}$$

$$\dot{\bar{\mathrm{P}}}_1 + 2\mu f_0 \bar{\mathrm{P}}_1 + \bar{q}_1 - \frac{\bar{\mathrm{P}}_3^2}{\bar{q}_1^3} = \frac{\mu^2}{4}\bar{q}_1\bar{\mathrm{P}}_1^2,$$

$$\dot{\overline{\mathrm{P}}}_2 + 2\mu f_0 \overline{\mathrm{P}}_2 + \mu^2 \overline{q}_2 = 0,$$

$$\dot{\overline{\mathrm{P}}}_3 + 2\mu f_0 \overline{\mathrm{P}}_3 = 0, \qquad (2)$$

где μ – малый параметр (отношение линейных частот крутильных колебаний к нутационным); f_0 – коэффициент трения; $\overline{q}_1, \overline{q}_2, \overline{q}_3$ – обобщенные координаты (в явном виде они выражаются через углы нутации, прецессии и собственного вращения маятника [4]), а $\overline{\mathrm{P}}_1, \overline{\mathrm{P}}_2, \overline{\mathrm{P}}_3$ – соответствующие обобщенные импульсы.

Из третьего уравнения (2) после интегрирования имеем

$$\overline{\mathrm{P}}_3 = \overline{\mathrm{P}}_0 e^{-2\mu f_0 \bar{t}}. \qquad (3)$$

В работе [4] показано, что введение координат $\overline{q}_1$, $\overline{q}_2$, $\overline{q}_3$ позволяет разбить функцию Гамильтона на парциальные энергии таким образом, что закон их изменения во времени не зависит от других парциальных энергий. Поэтому перекачки энергии с точностью до μ^3 включительно между степенями свободы q_1 и q_2 нет. Обмен энергией между ними происходит на более низком уровне, и им можно пренебречь. Это позволяет расщепить систему уравнений (1), (2) на подсистемы и значительно упростить решение.

Выражая $\overline{\mathrm{P}}_2$ из второго уравнения (1) и подставляя во второе уравнение (2), получаем

$$\ddot{\overline{q}}_2 + 2\mu f_0 \dot{\overline{q}}_2 + \mu^2 \overline{q}_2 = 0. \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) при $f_0 < 1$ имеет вид

$$\overline{q}_2 = \overline{A}_2 e^{-\mu f_0 t} \cos\overline{\psi}_2, \qquad (5)$$

где

$$\overline{\psi}_2 = \mu\omega_2 \bar{t} + e_2,\ \omega_2 = \sqrt{1 - f_0^2}. \qquad (6)$$

Тогда

$$\overline{\mathrm{P}}_2 = \left(\dot{\overline{q}}_2 + \frac{\mu}{2}\overline{\mathrm{P}}_3\right) = \mu a e^{-\mu f_0 \bar{t}} \left[\frac{\overline{\mathrm{P}}_0}{2} e^{-\mu f_0 \bar{t}} - \right.$$

$$\left. - \overline{A}_2 \cos\left(\overline{\psi}_2 - e_2'\right)\right], \qquad (7)$$

где

$$f_0 = \cos e_2',\ \omega_2 = \sin e_2',\ f_0^2 + \omega_2^2 = 1. \qquad (8)$$

В дальнейшем черточки над безразмерными переменными опускаем, где это не вызывает недоразумений. Выражаем R_1 из первого уравнения (1) и подставляем в первое уравнение (2):

$$\ddot{q}_1 + 2\mu f_0 \dot{q}_1 + q_1 - \frac{\mathrm{P}_3^2}{q_1^3} = \frac{\mu^2}{4}\left(q_1^3 - q_1 \dot{q}_1^2 - \frac{\mathrm{P}_3^2}{q_1}\right). \qquad (9)$$

Делаем замену переменной:

$$q_1 = u e^{-\mu f_0 t}. \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (9) и учитывая (3), уравнение (9) приводим к виду

$$\ddot{u} + \left(1 - \mu^2 f_0^2\right)u - \frac{\mathrm{P}_0^2}{u^3} =$$

$$= \frac{\mu^2}{4} e^{-2\mu f_0 t}\left[u^3 - u\dot{u}^2 - \frac{\mathrm{P}_0^2}{u}\right]. \qquad (11)$$

Обозначаем

$$\delta = 1 + \mu^2 f_0^2,\ \omega_0 = 2\left(1 - \frac{\mu^2 f_0^2}{2}\right). \qquad (12)$$

Решение уравнения (11) ищем методом вариации произвольных постоянных в виде

$$u = \sqrt{\delta(\alpha + \Delta\cos\psi)},\quad \dot{u} = -\frac{\omega_0 \delta \Delta \sin\psi}{2u},$$

$$\psi = \omega_0 (t - \beta),$$

$$\Delta = \sqrt{\alpha^2 - \mathrm{P}_*^2},\quad \mathrm{P}_*^2 = \left(1 - \mu^2 f_0^2\right)\mathrm{P}_0^2, \qquad (13)$$

где α и β – неизвестные функции. Заменяем уравнение (1) эквивалентной системой уравнений первого порядка, приведенной к стандартной форме [5], тогда получаем

$$\dot{\alpha} = -\frac{\mu^2 \Delta_0^2}{4} \sin 2\psi e^{-\tau},$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\mu^2}{2}\left(\Delta_0 + \alpha\cos\psi\right)\cos\psi e^{-\tau}, \qquad (14)$$

где $\tau = 2\mu f_0 t$ – медленное время.

Неавтономную замену переменных Крылова–Боголюбова ищем в виде [5,6]:

$$\alpha = \overline{\alpha} + \mu^2 u_1(\tau, \overline{\alpha}, \overline{\psi}) + \mu^4 u_2(\tau, \overline{\alpha}, \overline{\psi}) + ...,$$
$$\psi = \overline{\psi} + \mu^2 v_1(\tau, \overline{\alpha}, \overline{\psi}) + \mu^4 v_2(\tau, \overline{\alpha}, \overline{\psi}) + ... \tag{15}$$

Эта замена преобразует систему (14) в систему сравнения:

$$\frac{d\overline{\alpha}}{dt} = \mu^2 S_1(\tau, \overline{\alpha}) + \mu^4 S_2(\tau, \overline{\alpha}) + ...$$
$$\frac{d\overline{\psi}}{dt} = \omega_0 + \mu^2 G_1(\tau, \overline{\alpha}) + \mu^4 G_2(\tau, \overline{\alpha}) + ..., \tag{16}$$

где $\overline{\alpha}$, $\overline{\psi}$ – усредненные значения, а S_1, G_1, … u_2, v_2 – неизвестные функции.

Проводя необходимые операции для метода усреднения, получаем систему уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial \overline{\psi}} = -\frac{1}{2}\left\{S_1(\tau, \overline{\alpha}) + \frac{\overline{\Delta}^2}{4}\sin 2\overline{\psi} e^{-\tau}\right\}$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial \overline{\psi}} = -\frac{1}{2}\left\{G_1(\tau, \overline{\alpha}) + \left[\frac{\overline{\Delta}}{2}\cos\overline{\psi} + \frac{\overline{\alpha}}{4}(1 + \cos 2\overline{\psi})\right]e^{-\tau}\right\}. \tag{17}$$
$$\overline{\Delta} = \sqrt{\overline{\alpha}^2 - \mathrm{P}_0^2}$$

Усредняя правые части (17) по $\overline{\psi}$ и полагая их равными нулю, определяем $S_1(\tau, \overline{\alpha})$, $G_1(\tau, \overline{\alpha})$:

$$S_1(\tau, \overline{\alpha}) = 0, \; G_1(\tau, \overline{\alpha}) = -\frac{\overline{\alpha}}{4}e^{-\tau}. \tag{18}$$

Подставляем (18) в (17) и выполняем интегрирование

$$u_1(\tau, \overline{\alpha}, \overline{\psi}) = \frac{\overline{\Delta}^2}{16}e^{-\tau}\cos 2\overline{\psi}, \; v_1(\tau, \overline{\alpha}, \overline{\psi}) = -\frac{e^{-\tau}}{4}\left[\overline{\Delta}\sin\overline{\psi} + \frac{\overline{\alpha}}{4}\sin 2\overline{\psi}\right],$$

$$\alpha = \overline{\alpha} + \frac{\mu^2}{16}\overline{\Delta}^2 e^{-\tau}\cos 2\overline{\psi}, \; \psi = \overline{\psi} - \frac{\mu^2}{4}e^{-\tau}\left[\overline{\Delta}\sin\overline{\psi} + \frac{\overline{\alpha}}{4}\sin 2\overline{\psi}\right], \tag{19}$$

$$\frac{d\overline{\alpha}}{dt} = 0, \; \frac{d\overline{\psi}}{dt} = \omega_0 - \frac{\mu^2\overline{\alpha}}{4}e^{-\tau}.$$

Из последних двух соотношений после интегрирования по t следует

$$\overline{\alpha} = \overline{\alpha}_0 = const, \; \overline{\psi} = \omega_0 t - \frac{\mu}{8f_0}\overline{\alpha}\left(1 - e^{-\tau}\right) + \overline{\psi}_0. \tag{20}$$

Определяем $\overline{\alpha}_0$ и $\overline{\psi}_0$, используя соотношения (20):

$$\alpha_0 = \overline{\alpha}_0 + \frac{\mu^2}{16}\overline{\Delta}_0^2\cos 2\overline{\psi}_0, \quad \overline{\Delta}_0 = \sqrt{\overline{\alpha}_0^2 - \mathrm{P}_0^2}, \quad \psi_0 = \overline{\psi}_0 - \frac{\mu^2}{4}\left[\overline{\Delta}_0\sin\overline{\psi}_0 + \frac{\overline{\alpha}_0}{4}\sin 2\overline{\psi}_0\right], \tag{21}$$

где начальные амплитуду α_0 и фазу ψ_0 находим из начальных условий:

$$u_0^2 = q_{10}^2 = \alpha_0 + \Delta_{00}\cos\psi_0, \quad \Delta_{00} = \sqrt{\alpha_0^2 - \mathrm{P}_0^2}, \quad 2u_0\dot{u}_0 = 2q_{10}\left(\dot{q}_{10} + \mu f_0 q_{10}\right) = -\omega_0\delta_0\Delta_{00}\sin\psi_0. \tag{22}$$

Разлагая $\overline{\alpha}_0$ по степеням малого параметра *м* и учитывая, что $\overline{\psi}_0$ можно положить равным нулю [4], получаем

$$\overline{\alpha} = \overline{\alpha}_0 = \alpha_0 - \frac{\mu^2}{16}\Delta_{00}^2, \quad \overline{\psi}_0 = \psi_0 = 0,$$

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\mu^2\Delta_{00}^2}{16}\left(e^{-\tau}\cos 2\overline{\psi} - 1\right), \quad \psi = \overline{\psi} - \frac{\mu^2}{4}e^{-\tau}\left[\Delta_{00}\sin\overline{\psi} + \frac{\alpha_0}{4}\sin 2\overline{\psi}\right], \tag{23}$$

$$\overline{\psi} = \omega_0 t - \frac{\mu}{8f_0}\overline{\alpha}\left(1 - e^{-\tau}\right).$$

Тогда

$$q_1 = \sqrt{\delta}e^{-\frac{\tau}{2}}\left\{\sqrt{\left(\alpha_0 + \Delta_{00}\cos\overline{\psi}\right)} + \frac{\mu^2\Delta_{00}^2}{16\sqrt{\left(\alpha_0 + \Delta_{00}\cos\overline{\psi}\right)}}\left[e^{-\tau}\sin^2\overline{\psi} + \right.\right. \tag{24}$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\left(e^{-\tau} - 1\right)\left(1 + \frac{\alpha_0}{\Delta_{00}}\cos\overline{\psi}\right) + \frac{f_0^2\mathrm{P}_0^2}{4\Delta_{00}^2}\cos\overline{\psi}\right]\right\}.$$

Подставляя (3), (5), (24) в (1) и выполняя интегрирование с учетом начальных условий, получаем

$$q_3(t) = \frac{\mu(1 - \mu a)\mathrm{P}_0}{8f_0}\left(1 - e^{-\tau}\right) + \frac{\mu^2 a A_2}{2}\left(\cos e_2 - e^{-\frac{\tau}{2}}\cos\psi_2\right) + \int_0^t \frac{\mathrm{P}_0}{u^2}dt. \tag{25}$$

При $f_0 \to 0$ соотношения (24), (25) переходят в соотношение для собственных свободных колебаний, при этом интеграл в правой части (25) вычисляется в конечном виде [4]. При $\mathrm{P}_0 = 0$ получаем линейно поляризованные колебания [4].

Как видно из приведенных соотношений, для нелинейных колебаний характерны появление обертонов и зависимость амплитуд и частот колебаний от начальных условий и коэффициента трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калинников И.И.* Консервативные системы для геофизических исследований. М., 1983. 129 с.
2. *Зенков В.С., Калинников И.И., Нюнин М.И., Нюнина Н.А., Синякова В.Ф.* Эквивалентная шумовая температура в лаборатории и землетрясения // Доклады АН СССР. 1978. Т. 239, № 1. С. 74–76.
3. *Зенков В.С., Калинников И.И., Нюнин М.И.* Оперативный прогноз сильных землетрясений // Доклады АН СССР. 1980. Т. 254, № 2. С. 325–327.
4. *Мартынов Н.И.* Введение в теорию колебаний сейсмического маятника. Алматы, 2005. 161 с.
5. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, 1971. 440 с.
6. *Гребенников Е.А., Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в исследованиях резонансных систем. М., 1992. 221 с.

Резюме

Сейсмикалық маятниктің меншікті сызықты емес тербелістері қарастырылған.

Summary

Natural nonlinear oscillations of seismic pendulum were considered.

УДК 534.1+550.348

ИММаш им. У.А. Джолдасбекова МОН РК, г. Алматы

Поступила 3.06.2006 г.