*М. И. РАМАЗАНОВ*

# О ТОЧЕЧНОМ СПЕКТРЕ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ «СУЩЕСТВЕННО» НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

К «существенно» нагруженным дифференциальным уравнениям мы приходим при эквивалентном преобразовании нелокальных граничных задач в локальные, но уже для нагруженных уравнений [1], а также при решении некоторых обратных задач. Эти же модели возникают в задачах оптимального управления по принципу обратной связи, когда наблюдение за распределенным объектом управления производится по некоторым (не обязательно фиксированным) многообразиям размерности строго меньше, чем размерность области распределения исследуемого объекта [2].

Естественно, представляют интерес спектральные задачи, соответствующие полупериодическим граничным задачам, для «существенно» нагруженных параболических уравнений в ограниченной области.

**Постановка задачи.** В области $Q=\{x,t \mid 0<x<1,\ 0<t<2\pi\}$ рассматривается следующая спектральная задача:

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=-\alpha\left.\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=\bar{x}}, \\ u(0,t)=u(1,t)=0, \\ u(x,0)=u(x,2\pi), \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha\in C-$ спектральный параметр, $a=1-2\bar{x}$, $\bar{x}\in(0,1)-$ задано.

Будем искать ненулевые решения задачи (1) в виде

$$u(x,t)=\sum_{s\in J}u_s(x)e^{ist}, \quad \text{где} \quad s\in J,$$

тогда для искомых Фурье-коэффициентов $u_s(x)$ получим следующую краевую задачу для нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} isu_s(x)-u_s''(x)=-\alpha u_s''(\bar{x}), & x\in(0,1),\\ u_s(0)=u_s(1)=0, \quad is=\lambda^2, \end{cases}$$
$$\forall s\in J. \tag{2}$$

Используя функцию Грина и считая временно известной правую часть уравнения (2), запишем представление решения этой задачи:

$$u_s(x)=-\alpha\, u_s''(\bar{x})\left[\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2 \operatorname{ch}\lambda/2}\cdot \operatorname{ch}\frac{\lambda}{2}(1-2x)\right],$$
$$\forall s\in J\setminus\{0\}. \tag{3}$$

Для определения неизвестной величины $u_s''(\bar{x})$ продифференцируем равенство (3) по переменной $x$ дважды и, полагая $x=\bar{x}$, получаем

$$u_s''(\bar{x})\cdot\left[1-\alpha\frac{\operatorname{ch}\lambda/2(1-2\bar{x})}{\operatorname{ch}\lambda/2}\right]=0. \tag{4}$$

Таким образом, отыскание нетривиальных решений задачи (1) свелось к исследованию разрешимости уравнения

$$\operatorname{ch} z=\alpha \operatorname{ch} az, \tag{5}$$

$$z\in Z_0=\left\{z\,|\,z\in C,\ z=x(1\pm i),\ \ x=(|s|/8)^{1/2},\ s\in J\right\},\quad \alpha\in C,$$

так как по условию $u_s''(\bar{x})\neq 0$.

Прежде всего, покажем, что для любых $\alpha\in C$, $a\in(-1,1)$ уравнение $\operatorname{ch} z=\alpha\operatorname{ch} az$ на множестве $Z_0$ имеет не более одного решения.

1. Пусть $a=0$. Тогда исследуемое уравнение принимает вид

$$\operatorname{ch} z=\alpha. \tag{6}$$

Введем следующее представление числа $\alpha$:

$$\alpha=\operatorname{ch} b,\ \ b=b_1\pm ib_2,\ \ b_j\in R^1,\ j=1,2. \tag{7}$$

Заметим, во-первых, что числа $b$ определяются неоднозначно, с точностью до чисто мнимого слагаемого $i2\pi k$, $k=0,1,2,...$, во-вторых, в формуле (7) имеет место либо случай знака «+» либо «–». Таким образом, из (6) и (7) мы получаем уравнение

$$\operatorname{ch} z=\operatorname{ch} b, \tag{8}$$

решениями которого являются корни: $z_l^{\pm}=b_1+i(\pm b_2+2\pi l)$, $l=0,\pm1,\pm2,...$ Только в четырех случаях среди этих корней найдутся числа из множества $Z_0$: 1) $b_1=b_2$, значит $l=0$; 2) $b_1=-b_2$, значит $l=0$; 3) $b_1\neq b_2$, но существует число $\bar{l}_+$: $b_1=b_2+2\pi\bar{l}_+$; 4) $b_1\neq -b_2$, но существует число $\bar{l}_-$: $b_1=-b_2+2\pi\bar{l}_-$. Во всех случаях искомые корни имеют вид $z^{\pm}=b_1(1\pm i)\in Z_0$, а соответствующие этим корням числа $b$ имеют представления $b=b_1(1\pm i)$. В противном случае уравнение (8) на множестве $Z_0$ не имеет корней!

Итак, доказано следующее

**Утверждение 1.** Уравнение (6) имеет единственное решение $z^{\pm}=b_1(1\pm i)\in Z_0$ (либо со знаком плюс, либо со знаком минус) тогда и только тогда, когда число $b$ имеет представление $b=b_1(1\pm i)$. В противном случае уравнение (6) не имеет решения на множестве $Z_0$.

2. Пусть $a\neq 0$. Тогда исследуемое уравнение имеет вид

$$\operatorname{ch} z=\alpha\operatorname{ch} az. \tag{9}$$

Введем комплексное число $c$, такое, что

$$\operatorname{ch} z=\alpha\operatorname{ch} az=\operatorname{ch} c,$$
$$\text{где } c=c_1+ic_2, \text{ либо } c=c_1-ic_2, \tag{10}$$

т.е. из (10) получаем систему, состоящую из двух следующих уравнений:

$$\operatorname{ch} z=\operatorname{ch} c,\ \ \operatorname{ch} az=\operatorname{ch} d\equiv\frac{\operatorname{ch} c}{\alpha},$$
$$\text{где } d=d_1+id_2, \text{ либо } d=d_1-id_2. \tag{11}$$

Очевидно, что здесь числа $c$, $d$ задаются с точностью до чисто мнимого слагаемого $i2\pi k$, $k=0,1,2,...$ Кроме того, отметим, что каждому корню уравнения (11) соответствует свое число $c$ (и подходящее для этого $c$ число $d$).

Решая каждое из уравнений (11), находим соответствующие единственные решения из множества $Z_0$: $z_1^{\pm}=c_1(1\pm i)$, $z_2^{\pm}=\dfrac{d_1}{a}(1\pm i)$. Эти корни могут совпадать только при выполнении условия:

$$c_1=\frac{d_1}{a}, \tag{12}$$

т.е. только при выполнении условия (12) уравнение (9) на множестве $Z_0$ имеет единственное решение, в противном случае уравнение (9) на множестве $Z_0$ не имеет решения!

С другой стороны, из соотношений (11) получаем, что параметр $\alpha$ может принимать только следующие значения:

$$\alpha = \frac{\operatorname{ch} c_1(1+i)}{\operatorname{ch} ac_1(1+i)}, \quad \text{либо} \quad \alpha = \frac{\operatorname{ch} c_1(1-i)}{\operatorname{ch} ac_1(1-i)}.$$

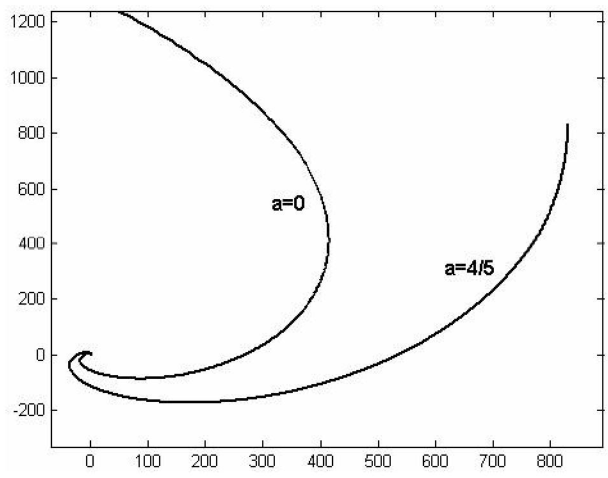
Наконец, учитывая дискретность в определении множества $Z_0$, окончательно получаем

**Утверждение 2.** Уравнение (9) имеет единственное решение $z^{\pm} = c_1(1 \pm i)$ (либо со знаком плюс, либо со знаком минус) тогда и только тогда, когда

$$\alpha = \frac{\operatorname{ch} c_1(1 \pm i)}{\operatorname{ch} ac_1(1 \pm i)}, \tag{13}$$

где $c_1 \in G = \{c \mid c = (|s|/8)^{1/2}, \ s = 0; \pm 1; \pm 2; ...\}$

Графики кривых в комплексной плоскости (для двух значений параметра $a$, а именно для $a = 0$, $a = 4/5$), на которых расположены точки, координаты которых определяются комплексным числом $\alpha$, приведены на следующем рисунке. Отметим, что на этом рис. представлены графики только для неотрицательных $s$. Для отрицательных значений $s$ данные графики дополнятся своими зеркальными отображениями относительно вещественной оси. Далее, если точка, соответствующая числу $\alpha$, лежит вне кривой для $a = 4/5$, то уравнение (9) при $a = 4/5$ не имеет решения на множестве $Z_0$. Это означает, что ядро нагруженного оператора нульмерно. Если же точка комплексной плоскости $\alpha$ лежит на кривой для $a = 4/5$ и ее координаты определяются согласно формуле (13), где $c_1 \in G$, то уравнение (9) при $a = 4/5$ имеет единственное решение на множестве $Z_0$, определяемое как $z^+ = c_1(1+i)$ (для положительных $s$), т.е. в этом случае ядро нагруженного оператора одномерно! Это же остается справедливым и для отрицательных $s$.




Кривые, на которых расположены точки спектра

Таким образом показана справедливость следующей теоремы

**Теорема.** Спектральная задача (1) имеет счетный точечный спектр, расположенный на кривой комплексной плоскости

$$\alpha_{\{s \ge 0\}} = \frac{\operatorname{ch} c_1(1+i)}{\operatorname{ch} ac_1(1+i)}, \quad s = 0, 1, 2, ....;$$

$$\alpha_{\{s<0\}} = \frac{\operatorname{ch} c_1(1-i)}{\operatorname{ch} ac_1(1-i)}, \quad s = -1, -2, ....; \quad (**)$$

где $c_1 \in G = \{c \mid c = (|s|/8)^{1/2}, \ s = 0; \pm 1; \pm 2; ...\}$, соответствующей заданному значению параметра $a = 1 - 2\overline{x}$. Собственные функции имеют вид:

$$u_s(x,t) = \frac{1}{is}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{(1-2x)\sqrt{is}}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{is}}{2}}\right)e^{ist}, \quad s \in J,$$

$$u_0(x,t) = x(1-x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дженалиев М.Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, 1995.

2. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* О граничных задачах для «существенно» нагруженных параболических уравнений в неограниченных областях. I (одномерный случай) // Доклады АМАН. Нальчик, 2004. Т. 7, №1. С. 32–36.

**Резюме**

Шектелген облыста “елеулі” жүктелген параболалық теңдеу үшін қарастырылған жалпыланған спектралдық есептің сандық нүктелі спектрі бар екені көрсетілген.

**Summary**

There is shown, that the spectral problem for parabolic equation “essentially loaded on a spatial variable in the limited area has counting the dot spectrum located on rigorously the described curve complex plane of values of spectral parameter.

УДК 517.956

*Институт математики МОН РК,*
*г. Алматы*

*Поступила 3.05.06г.*