А. М. САРСЕНБИ, М. Б. ИВАНОВА

О БАЗИСНОСТИ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ САМОСОПРЯЖЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Одним из достаточно полно изученных разделов спектральной теории дифференциальных операторов являются самосопряженные дифференциальные операторы, собственные функции которых образуют ортонормированный базис [1, с. 91]. В случае же несамосопряженных дифференциальных операторов изучение вопросов базисности оказалось довольно трудным. Дело в том, что система собственных функций несамосопряженного дифференциального оператора может оказаться неполной, тогда ее приходится дополнять, так называемыми, присоединенными функциями.

В 1962 г. В. П. Михайлов, а затем в 1964 г. Г. М. Кесельман установили, что система собственных и присоединенных функций несамосопряженного дифференциального оператора порядка n с, так называемыми, усиленно регулярными краевыми условиями образует базис Рисса.

Этот же результат был установлен Н. Данфордом и Дж. Шварцем [2] с помощью развитой ими теории спектральных операторов (таковыми являются операторы, обладающие вполне непрерывной резольвентой и системой корневых функций, образующих базис Рисса).

Во всех перечисленных работах принципиальным моментом является тот факт, что рассматриваемые задачи обладают только конечным числом присоединенных функций [1, с. 74].

В случае же когда общее число присоединенных функций бесконечно, возникают новые трудности, связанные с построением цепочек присоединенных функций и с установлением полноты корневых функций. Решение этих проблем изложено в известной работе М.В. Келдыша [3].

Однако, при изучении вопросов базисности, применение теории присоединенных функций М. В. Келдыша может дать неоднозначный ответ. Так, если собственные функции дифференциального оператора определяются с точностью до постоянного множителя, то присоединенные функции могут быть определены с точностью до слагаемого, содержащего собственную функцию, то есть, если u_{k0} – собственная, а u_{k1} – соответствующая присоединенная функция, то $u_{k1}+cu_{k0}$ – также присоединенная функция. При этом, если система $\{u_{k0}, u_{k1}\}$ является базисом в пространстве L_2, то система $\{u_{k0}, u_{k1}+cu_{k0}\}$ может не быть базисом при любом $c \neq 0$. Этот факт подтверждается примером, приведенным в работе [4] В. А. Ильина (см. также [5]), когда присоединенные функции определяются по формуле

$$Lu_{k1} = \lambda_k u_{k1} - u_{k0}, \qquad (1)$$

где λ_k – собственное значение оператора L.

Указанного эффекта не будет, если присоединенные функции определять по формуле

$$Lu_{k1} = \lambda_k (u_{k1} - u_{k0}), \qquad (2)$$

предложенной М. А. Садыбековым и А. М. Сарсенби [6].

Если при применении формул (1) базисность корневых функций зависит как от спектральных характеристик оператора, так и от способа выбора присоединенных функций, то при использовании формул (2) базисность корневых векторов зависит только от спектральных характеристик оператора и не зависит от способа выбора присоединенных функций, т.е. при использовании формул (2) базисные свойства не приобретаются и не пропадают. Другими словами, если при применении формул (1) к какой-то задаче существует хотя бы один выбор присоединенных функций, обеспечивающих базисность корневых функций, то при использовании формул (2) к той же задаче, любая система собственных и присоединенных функций будет базисом. Это усматривается и из следующих рассмотрений.

А.С. Мокиным в работе [7] рассмотрена следующая задача

$$u'' + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(1),$$

$$u'(0) = u'(1) + \int_0^1 P(x)u(x)dx, \qquad (3)$$

где комплекснозначная функция $P(x) \in L_1(0,1)$.

В случае, когда $\int_0^1 P(x)u(x)dx = 0$, задача (3) является периодической самосопряженной задачей, системой собственных функций которой является обычная тригонометрическая система.

Полнота и минимальность собственных и присоединенных функций этой задачи установлена А. А. Шкаликовым в работе [8], а в вышеупомянутой работе [7] указана асимптотика собственных значений

$$\lambda_n' = (2\pi n + \rho_n')^2, \quad \lambda_n'' = (2\pi n + \rho_n'')^2,$$

$$\text{где } |\rho_n'| < \frac{1}{n}, |\rho_n''| < \frac{1}{n}. \qquad (4)$$

Обозначим через P_0 множество функций $P(x)$ из (3) таких, что система собственных и присоединенных функций задачи (3), определенных по формулам (1), образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, а через $\overline{P_0} = L_1(0,1) \setminus P_0$. В работе [7] установлено, что множества P_0, $\overline{P_0}$ всюду плотны в $L_1(0,1)$.

Пусть P_1 – множество функций $P(x)$ таких, что система собственных и присоединенных функций задачи (3), определенных по формулам (2), образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, $\overline{P_1} = L_1(0,1) \setminus P_1$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Множества P_1, $\overline{P_1}$ всюду плотны в $L_1(0,1)$.

Доказательство. Следуя работе [7] обозначим $a_0 = \int_0^1 P(x)dx,\ a_n = \int_0^1 P(x)\cos 2n\pi x dx,$

$b_n = \int_0^1 P(x)\sin 2n\pi x dx$, $n = 1, 2,\ldots$, S_n – двумерное подпространство, образованное корневыми функциями, отвечающими собственным значениям λ_n', λ_n'' (4) $(n = n_0, n_0 + 1, \ldots)$, где n_0 – некоторое достаточно большое число, а S_n – корневое подпространство, соответствующее собственному значению λ_n, $n = 0,1,\ldots,n_0{-}1$. В ходе доказательства мы повторяем рассуждения из работы [7], кроме случая, когда задача (3) обладает присоединенными функциями. Мы рассмотрим несколько случаев, связанных со значениями интегрального слагаемого в краевых условиях задачи (3).

1. Пусть $a_n = b_n = 0 \quad (n \ge n_0)$. Тогда за исключением конечного числа, собственные функции задачи (3) совпадают с собственными функциями самосопряженной периодической задачи (когда интегральное слагаемое в краевом условии задачи (3) равно нулю). Функция

$$u_n(x) = c_1 \sin 2\pi nx + c_2 \cos 2\pi nx$$

является собственной функцией задачи (3), соответствующей собственному значению $\lambda_n = \lambda_n' = \lambda_n'' = (2n\pi)^2$. Подпространство S_n образовано двумя собственными функциями, соответствующими собственному значению λ_n.

2. Пусть $|a_n| + |b_n| > 0, \ \ n \ge n_0$. Функция

$$u_{n0}(*) = b_n \cos 2n\pi x - a_n \sin 2n\pi x \qquad (5)$$

является собственной функцией, соответствующей собственному значению $\lambda_n' = (2n\pi)^2$. Это проверяется непосредственно: если $a_n = 0$, $b_n \ne 0$, то

$$u_{n0}(x) = b_n \cos 2n\pi x,$$

и этой собственной функции соответствует присоединенная функция $u_{n1}(x)$, определенная по формуле (2)

$$u_{n1} = n\pi(b_n x + \gamma_n)\sin 2n\pi x,$$

где

$$\gamma_n = -2n\pi - \int_0^1 xP(x)\sin 2n\pi x dx.$$

Подпространство S_n образовано корневыми функциями u_{n0} и u_{n1}, соответствующими собственному значению λ_n'.

Пусть теперь $a_n \ne 0$. В работе [7] установлено, что в этом случае $\lambda_n' = (2n\pi)^2 \ne \lambda_n''$ и поэтому $\lambda_n'' = (2n\pi + \rho_n'')^2$, а также выписана асимптотика соответствующей этому собственному значению λ_n'' собственной функции

$$\widetilde{u}_{n0} = \sqrt{2}(\cos 2n\pi + \rho_n'')x + 0(\rho_n'').$$

Вследствие этого подпространство S_n образовано двумя собственными функциями, функцией (5), которую запишем в виде

$$\hat{u}_{n0} = \frac{1}{\sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}} u_{n0}(x),$$

и функцией $\tilde{u}_{n0}$.

Если $b_n \neq 0$ при достаточно больших n и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{\sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}} = 1$ и, следовательно, $\hat{u}_{n0}(x) = \tilde{u}_{n0}(x) + 0(1)$. Отсюда следует, что эти системы не могут образовать базис, так как угол между функциями $\hat{u}_{n0}(x)$ и $\tilde{u}_{n0}(x)$ стремится к нулю, когда $n \to \infty$.

В работе [8] доказана базисность Рисса подпространств S_n в $L_2(0,1)$. В случае $a_n = 0,\ b_n = 0$ для всех достаточно больших номеров n, выбирая в каждом из подпространств S_n ортонормированный базис, будем иметь, что система собственных и присоединенных функций задачи (3) является базисом Рисса пространства $L_2(0,1)$.

Для завершения доказательства теоремы рассмотрим n-е частичные суммы разложения в тригонометрический ряд произвольной функции $f(x) \in L_2(0,1)$, которые обозначим $\sigma_n(x,f)$. Поскольку тригонометрическая система является базисом в $L_2(0,1)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N > n_0$, что выполняется соотношение

$$\|f(x) - \sigma_N(x,f)\|_{L_2(0,1)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если положим $P(x) = \sigma_N(x,f)$, то $a_n = b_n = 0$ при $n > N$ и система корневых функций задачи (3) образует базис Рисса. В то же время

$$\|f(x) - P(x)\|_{L_2(0,1)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

что означает всюду плотность множества P_1 в $L_2(0,1)$. Следовательно, множество P_1 является всюду плотным и в $L_1(0,1)$.

Пусть

$$P(x) = \sigma_N(x,f) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x,$$

где $a_n = \frac{\varepsilon}{2^n n}$, $b_n = \frac{\varepsilon}{2^n}$. Тогда также

$$\|f(x) - P(x)\|_{L_2(0,1)} < \varepsilon,$$

но уже система корневых функций задачи (3) не образует базиса в $L_2(0,1)$. Отсюда получаем всюду плотность множества $\overline{P_1}$ в пространствах $L_2(0,1)$ и $L_1(0,1)$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 528 с.

2. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Ч. 3. Спектральные операторы. М., 1974.

3. *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // ДАН СССР. 1951. Т. 77, №1. С. 11-14.

4. *Ильин В.А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Труды МИАН СССР. 1976. Т. 142. С. 148-155.

5. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, №2. С. 294-304.

6. *Садыбеков М.А., Сарсенби А.М.* К вопросу определения корневых функций линейных дифференциальных операторов // Труды III международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик, 2006.

7. *Мокин. А.С.* О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 4. С. 560-562.

8. *Шкаликов А.А.* // Весник МГУ. Сер. математика и механика. 1982. №6. С. 12-21.

9. *Михайлов В.П.* О базисах Рисса в $L_2(0,1)$ // ДАН СССР. 1962. Т. 144, №5. С. 981-984.

10. *Кесельман Г.М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Известия вузов СССР. Сер. математика. 1964. №2. С. 82-93.

Резюме

Базистік характеристиканың өзіне-өзі түйіндес периодты есептің іркілуі қарастырылды. Автор меншікті векторлар мен қосалқы функцияның өзіне-өзі түйіндес есеп үшін толық екендігі туралы негізгі теореманы дәлелдеді.

Summary

Basic characteristics of one self conjugate problem have been considered in this work. Important theorem of density of own and connected functions system for one self conjugate problem have been proved by authors.

УДК 517.98+517.998

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент

Поступила 2.05.06г.