

## СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО НАПРАВЛЯЮЩЕГО ДВУХПОДВИЖНОГО МЕХАНИЗМА V КЛАССА ПО ЗАДАНЫМ ПОЛОЖЕНИЯМ ВЫХОДНОЙ ТОЧКИ ШАТУНА

Рассмотрим задачу синтеза пространственного механизма V класса общего вида в соответствии с рисунком по четырем заданным положениям входного звена 1 и выходной точки  $T$  звена 3

$$\varphi_{1i} = \varphi_1(t_i), \quad \varphi_{7i} = \varphi_7(t_i) \text{ и } X_{Ti} = X_T(t_i), \\ Y_{Ti} = Y_T(t_i), \quad Z_{Ti} = Z_T(t_i), \quad i = \overline{1,4}. \quad (1)$$

Решение задачи синтеза механизма проведено с использованием метода интерполирования. Для решения задачи синтеза кинематической цепи  $ABCD$  механизма по заданным положениям выходной точки  $T$  звена ( $BC$ ) [1], в котором приближающая окружность точки  $C$  радиусом  $l_{CD} = l_{4\phi}$  с центром в точке  $D$  звена 4 ( $CD$ ) определяется как линия пересечения сферы с координатами

$X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}$  и плоскости, удобно использовать выражения взвешенных разностей [2].

$$\Delta q = l_4^2 - l_{4\phi}^2, \quad (2)$$

$$\Delta q_i = ax_{3Ci} + by_{3Ci} + cz_{3Ci} - 1 = 0, \quad (3)$$

где  $l_{4\phi}$  – расстояние между точками  $C$  звена 3 и  $D_1$ :

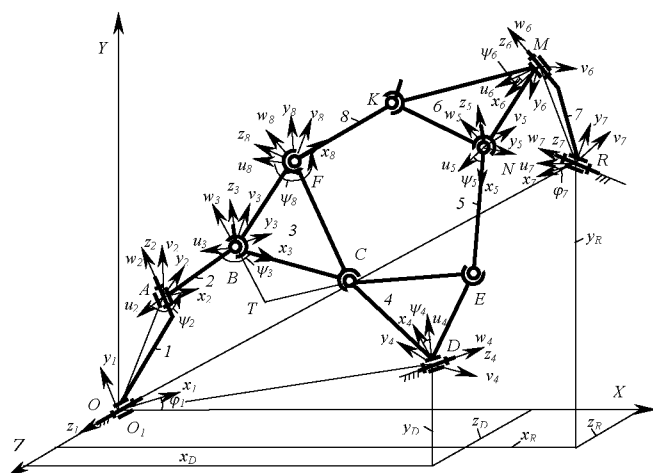
$$l_{4\phi}^2 = (X_{D1} - X_{Ci})^2 + (Y_{D1} - Y_{Ci})^2 + (Z_{D1} - Z_{Ci})^2 \quad (4)$$

$a, b, c$  – коэффициенты уравнения приближающей плоскости;  $X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, X_{\alpha}, Y_{\alpha}, Z_{\alpha}$  – соответствующие координаты точек  $D_1$  (центра сферы) и  $C$  в абсолютной системе координат  $OXYZ$ .

По условию синтеза координаты точки  $C$  звена 3, которому принадлежат локальные координаты выходной точки  $T$ , в абсолютной системе координат  $OXYZ$  определяются с использованием обобщенного метода символических обозначений преобразования координат [3] в виде

$$\begin{aligned} X_C &= x_{3C} \cos(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + \\ &+ z_{3C} \sin(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + X'_C, \\ Y_C &= x_{3C} \sin(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) - \\ &- z_{3C} \cos(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + Y'_C, \\ Z_C &= y_{3C} \cos \beta_3 + Z'_C, \end{aligned} \quad (5)$$

где



$$X'_C = a_{2,1} \cos \varphi_1 + a_{3,2} \cos(\varphi_1 + \psi_2);$$

$$Y'_C = a_{2,1} \sin \varphi_1 + a_{3,2} \sin(\varphi_1 + \psi_2);$$

$$Z'_C = c_{21} + b_{21} + b_{32} \cos \alpha_{21}.$$

Синтезу подлежат 10 неизвестных геометрических параметров кинематической цепи  $ABCD$  механизма. Из них 7 параметров:  $x_{3C}, y_{3C}, z_{3C}, X_D, Y_D, Z_D, l_{CD}$  – параметры синтезируемого звена 4 ( $CD$ ) – и 3 параметра –  $X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}$  – координаты центра сферы.

**Вычисление четырех параметров** рассмотрим на примере одного из вариантов:

$$X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, l_{CD1}.$$

Выражение взвешенной разности (2) с учетом уравнений координат точки  $C$  запишем в виде обобщенного полинома.

$$\Delta q = p_1 f_1(\varphi_1, \psi_2) + p_2 f_2(\varphi_1, \psi_2) + p_3 f_3(\varphi_1, \psi_2) + p_4 f_4(\varphi_1, \psi_2) - F(\varphi_1, \psi_2), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= X_{D1}, \quad f_1(\varphi_1, \psi_2) = \\ &= -2[x_{3C} \cos(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + \\ &+ z_{3C} \sin(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + X'_C]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= Y_{D1}, \quad f_2(\varphi_1, \psi_2) = \\ &= -2[x_{3C} \sin(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) - \\ &- z_{3C} \cos(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + Y'_C]; \end{aligned}$$

$$p_3 = Z_{D1}, \quad f_3(\varphi_1, \psi_2) = -2(y_{3C} \cos \beta_3 + Z'_C);$$

$$p_4 = X_{D1}^2 + Y_{D1}^2 + Z_{D1}^2 - l_{D1C}^2, \quad f_4(\varphi_1, \psi_2) = 1;$$

$$\begin{aligned} F(\varphi_1, \psi_2) &= -2x_{3C}[X'_C \cos(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + \\ &+ Y'_C \sin(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3))] - 2y_{3C} \cos \beta_3 Z'_C - \\ &- 2x_{3C}[X'_C \sin(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) - \\ &- Y'_C \cos(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3))] - \\ &- 2x_{3C}z_{3C} \sin 2(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) - \\ &- (x_{3C}^2 + y_{3C}^2 + z_{3C}^2) - (X_C'^2 + Y_C'^2 + Z_C'^2). \end{aligned}$$

При решении задачи синтеза по методу интерполирования для четырех заданных положе-

ний механизма отклонения взвешенной разности должны равняться нулю. С учетом этого из выражения (6) имеем

$$p_1 f_1(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) + p_2 f_2(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) + p_3 f_3(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) + p_4 f_4(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) - F(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) = 0, \quad i = \overline{1,4}. \quad (7)$$

Уравнение представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров  $p_1, p_2, p_3, p_4$ . Решение этой системы имеет вид

$$\bar{p} = A^{-1} \bar{F}, \quad \text{если } \det A \neq 0. \quad (8)$$

Определим неизвестные геометрические параметры кинематической цепи  $ABCD$  механизма по формулам

$$X_{D1} = p_1, \quad Y_{D1} = p_2,$$

$$Z_{D1} = p_3, \quad l_{CD1} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4}.$$

**Вычисление остальных четырех параметров** проводим с использованием выражения взвешенной разности приближающей плоскости (3):

$$\Delta q_i = ax_{3Ci} + by_{3Ci} + cz_{3Ci} - 1 = 0.$$

С учетом координат точки  $C$  запишем систему четырех уравнений в виде

$$\begin{aligned} aX_{C1} + bY_{C1} + cZ_{C1} &= 1, \\ aX_{C2} + bY_{C2} + cZ_{C2} &= 1, \\ aX_{C3} + bY_{C3} + cZ_{C3} &= 1, \\ aX_{C4} + bY_{C4} + cZ_{C4} &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Из первых трех уравнений определим коэффициенты

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad c = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \text{если } \Delta \neq 0. \quad (10)$$

Подставив выражения  $a, b, c$  в четвертое уравнение системы (9) и задав значения  $x_{3C}, z_{3C}$ , получим уравнение относительно неизвестного

$$y_{3C} = \frac{1 - aX_{Ci} - bY_{Ci} - cZ_{Ci}}{c \cos \beta_3}. \quad (11)$$

В частном случае, когда одна из двух подвижных систем координат принимается за неподвижную систему, совпадающую с абсолютной

системы координат  $OXYZ$ , координаты  $x_D, y_D, z_D$  (центра окружности) приравниваются к координатам точки  $D$ :  $X_D, Y_D, Z_D$ . Следовательно, основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы  $D_1$  к плоскости, определяет координаты  $X_D, Y_D, Z_D$  центра  $D$  приближающей окружности

$$\begin{aligned} X_D &= X_{D1} + Q_x d, \quad Y_D = Y_{D1} + Q_y d, \\ Z_D &= Z_{D1} + Q_z d, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $Q_x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad Q_y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$

$Q_z = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$  – направляющие косинусы

оси вращательной пары в точке  $D$  звена 4;

$$d = \frac{aX_{D1} + bY_{D1} + cZ_{D1} - 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (13)$$

Длина звена 4 ( $CD$ ), т.е. радиус окружности, определяется по формуле

$$l_{CD\phi} = \sqrt{(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2 + (Z_D - Z_C)^2}. \quad (14)$$

Таким образом, по четырем заданным положениям механизма определены восемь параметров:  $y_{3C}, a, b, c, l_{CD}, X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}$ .

Рассмотрим задачу синтеза пространственного механизма V класса общего вида в соответствии с рисунком по пяти заданным положениям входного звена 1 и выходной точки  $T$  звена 3

$$\varphi_{1i} = \varphi_1(t_i) \quad \text{и} \quad X_{Ti} = X_T(t_i), \quad Y_{Ti} = Y_T(t_i),$$

$$Z_{Ti} = Z_T(t_i), \quad i = \overline{1,5}. \quad (15)$$

**Вычисление пяти параметров** рассмотрим на примере одного из вариантов:

$$X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, y_{3C}, l_{CD1}.$$

Выражение взвешенной разности (2) с учетом уравнений координат точки  $C$  запишем в виде обобщенного полинома.

$$\begin{aligned} \Delta q &= p_1 f_1(\varphi_1, \psi_2) + p_2 f_2(\varphi_1, \psi_2) + \\ &+ p_3 f_3(\varphi_1, \psi_2) + p_4 f_4(\varphi_1, \psi_2) + p_5 f_5(\varphi_1, \psi_2) + \\ &+ p_3 p_4 f_6(\varphi_1, \psi_2) - F(\varphi_1, \psi_2), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}
 p_1 &= X_{D1}, \quad f_1(\varphi_1, \psi_2) = -2[a_{2,1} \cos \varphi_1 + \\
 &+ a_{3,2} \cos(\varphi_1 + \psi_2) + x_{BC} \cos(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + \\
 &+ z_{BC} \sin(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3))]; \\
 p_2 &= Y_{D1}, \quad f_2(\varphi_1, \psi_2) = -2[a_{2,1} \sin \varphi_1 + \\
 &+ a_{3,2} \sin(\varphi_1 + \psi_2) + x_{BC} \sin(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + \\
 &+ z_{BC} \cos(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3))]; \\
 p_3 &= Z_{D1}, \quad f_3(\varphi_1, \psi_2) = -2Z'_C; \\
 p_4 &= y_{BC}, \quad f_4(\varphi_1, \psi_2) = -2Z_C \cos \alpha_{21}; \\
 p_5 &= X_{D1}^2 + Y_{D1}^2 + Z_{D1}^2 + y_{BC}^2 - l_{D1C}^2, \quad f_5(\varphi_1, \psi_2) = 1; \\
 p_3 p_4 &= y_{BC} Z_{D1}, \quad f_6(\varphi_1, \psi_2) = -2 \cos \alpha_{21}; \\
 F(\varphi_1, \psi_2) &= -2x_{BC}[X'_C \cos(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + Y'_C \sin(\varphi_1 + \\
 &+ (\psi_2 + \psi_3))] - 2z_{BC}[Y'_C \cos(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + X'_C \sin(\varphi_1 + \\
 &+ (\psi_2 + \psi_3))] - 2z_{BC} x_{BC} \sin 2(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) - \\
 &- (x_{BC}^2 + z_{BC}^2 + X_C'^2 + Y_C'^2 + Z_C'^2).
 \end{aligned}$$

При решении задачи синтеза по методу интерполирования для пяти заданных положений механизма отклонения взвешенной разности должны равняться нулю. С учетом этого из выражения (16) имеем

$$\begin{aligned}
 p_1 f_1(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) + p_2 f_2(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) + p_3 f_3(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) + \\
 + p_4 f_4(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) + p_5 f_5(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) + p_3 p_4 f_6(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) - \\
 - F(\varphi_{1i}, \varphi_{2i}) = 0, \quad i = \overline{1,5}.
 \end{aligned}$$

Решив систему уравнений (17) методом исключения неизвестных, получим квадратное уравнение относительно неизвестного  $p_4$ :

$$k_1 p_4^2 + k_2 p_4 + k_3 = 0. \quad (18)$$

Решив уравнение (18), определим геометрические параметры кинематической цепи ABCD механизма по формулам

$$X_{D1} = p_1, \quad Y_{D1} = p_2, \quad Z_{D1} = p_3, \quad y_{3C} = p_4,$$

$$l_{CD1} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - p_5}.$$

**Вычисление остальных пяти параметров:**  $x_{3C}, z_{3C}, X_D, Y_D, Z_D$  проводим с использованием выражения взвешенной разности (3):

$$\Delta q_i = ax_{3Ci} + by_{3Ci} + cz_{3Ci} - 1 = 0, \quad i = \overline{1,5}. \quad (19)$$

Определим коэффициенты  $a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, b = \frac{\Delta_2}{\Delta},$

$$c = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \text{ если } \Delta \neq 0.$$

Для решения задачи синтеза указанных пяти параметров составим систему из трех алгебраических уравнений, состоящих из двух уравнений системы (19) и квадратного уравнения (18). После соответствующих преобразований получим

$$\begin{aligned}
 T_4(z^0)x^4 + T_3(z)x^3 + T_2(z^2)x^2 + \\
 + T_1(z^3)x + T_0(z^4) = 0, \\
 S_6(z^0)x^6 + S_5(z)x^5 + S_4(z^2)x^4 + S_3(z^3)x^3 + \\
 + S_2(z^4)x^2 + S_1(z^5)x + S_0(z^6) = 0, \quad (20)
 \end{aligned}$$

где  $x = x_{3C}, y = y_{3C}, z = z_{3C}.$

Система уравнений содержит неизвестные  $x$  и  $z$ . Исключив неизвестное  $x$ , получим алгебраическое уравнение 24-й степени относительно неизвестного  $z$ . Решив данное уравнение, найдем вещественные решения относительно неизвестного, число которых определяется по теореме Штурма. Для положительных вещественных значений неизвестного  $z$  определим значения остальных неизвестных:  $x = x_{3C}, y = y_{3C}.$

Аналогично, как показано выше, определяются координаты центра приближающей плоскости

$$X_D = X_{D1} + Q_x d, \quad Y_D = Y_{D1} + Q_y d,$$

$$Z_D = Z_{D1} + Q_z d.$$

Длина звена 4 (CD), т.е. радиус окружности, находится по формуле

$$l_{CD\phi} = \sqrt{(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2 + (Z_D - Z_C)^2}.$$

Таким образом, по пяти заданным положениям механизма определены десять параметров:

$$x_{3C}, y_{3C}, z_{3C}, X_D, Y_D, Z_D, X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, l_{CD}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зинovieв В.А. Пространственные механизмы с низшими парами. М.: Гостехиздат, 1952. 432с.
2. Артоboлевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А. Синтез плоских механизмов. М.: Госиздат, 1959. 1084с.
3. Шет и Уикер мл. Обобщенная система символических обозначений механизмов // Конструирование и технология машиностроения. 1971. №1. С. 96-106.

**Резюме**

Екі дәрежелі V класты кеңістікті бағыттаушы механизмнің шатун буынының шығыс нүктесінің берілген төрт және бес жағдайына байланысты, интерполяция тәсіліне сүйене отырып, геометриялық параметрлерінің синтез есебі шешілген.

**Summary**

The task of synthesis of geometrical parameters of a spatial guide link two- moving mechanism of V class upon four and five preset positions of output point of connecting rod using the interpolation method is solved.

*Поступила 02.03.2006 г.*