С. А. АБДЫМАНАПОВ

О ЗАДАЧЕ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ *n*-ГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Задача Римана–Гильберта для эллиптических систем первого порядка на плоскости с сингулярной точкой изучена в работах [1–3]. Работы [4, 5] посвящены исследованиям разрешимости обобщенных задач Римана–Гильберта для эллиптических систем второго и третьего порядков на плоскости с сингулярной точкой. В работе [6] рассмотрена задача Римана–Гильберта для одного класса линейных эллиптических систем n-го порядка на плоскости с сингулярной точкой.

Пусть $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$, n – целое число, удовлетворяющее неравенству

$$n < \frac{1-\gamma}{2\beta} + \frac{1+\gamma}{2},$$

и $G = \{z : |z| < 1\}$, $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$.

Через $S(G)$ обозначим пространство измеримых и существенно ограниченных в G функций $f(z)$ с нормой

$$\| f(z) \|_{S(G)} = \sup_{z\in G} vrai \, | f(z) | .$$

Ниже также используем следующие пространства. $S_\nu(G)$ – класс функций $f(z)$, для которых $|z|^\nu \cdot f(z) \in S(G)$, где ν – действительное число. Норма в $S_\nu(G)$ определяется по формуле

$$\| f \|_{S_\nu(G)} = \left\| |z|^\nu \cdot f(z) \right\|_{S(G)},$$

где $W^n_{q,\beta}(G)$ – класс функций $f(z)$, для которых $\dfrac{\partial^{\beta,n}}{\partial z^n} \in L_q(G)$.

Здесь $\dfrac{\partial^{\beta,1}}{\partial z} = \dfrac{\partial^{\beta}}{\partial \bar z} = \dfrac{\partial}{\partial \bar z} - \beta \dfrac{z}{\bar z}\dfrac{\partial}{\partial z}$, $0 < \beta < 1$, $\dfrac{\partial^{\beta,k}}{\partial z^k} = \dfrac{\partial^{\beta}}{\partial \bar z}\left(\dfrac{\partial^{\beta,k-1}}{\partial z^{k-1}}\right)$, $k \ge 2$ – целое число.

$W^n_{q,\beta}(G,\gamma)$ – класс функций $f(z)$, представимых в G в виде $f(z) = \left(z\,|z|^\theta\right)^{-\gamma} \cdot f_0(z)$, где $f_0(z) \in W^n_{q,\beta}(G)$, $\theta = \dfrac{2\beta}{1-\beta}$; $U_0(z)$ – класс голоморфных в G функций.

Рассмотрим в G уравнение

$$\frac{\partial^{\beta,n}W}{\partial z^n} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(z)\frac{\partial^{\beta,n-k}W}{\partial z^{n-k}} + A_n(z)\cdot H_1(z,W) + B(z)\cdot H_2(z,\overline{W}) = F(z), \tag{1}$$

где $A_k(z) \in S_k(G)$, $(k = \overline{1,n})$, $B(z) \in S_n(G)$, $F(z) \in S_\gamma(G)$.

$H_1(z,W)$ и $H_2(z,\overline{W})$ как функции от z, измеримы и существенно ограничены в G, относительно W удовлетворяют условиям:

$$H_1(z,0) = H_2(z,0), \tag{2}$$

$$\left\| \frac{H_1(z,W_1) - H_2(z,W_2)}{W_1 - W_2} \right\|_{S(G)} < c_1, \quad \left\| \frac{H_2(z,\overline{W}_1) - H_2(z,\overline{W}_2)}{W_1 - W_2} \right\|_{S(G)} < c_2 , \tag{3}$$

$c_1 > 0$, $c_2 > 0$ – заданные действительные числа.

Если $H_1(z,0)\neq 0,\ H_2(z,0)\neq 0$, то предполагая, что

$$H_k(z,0)\in S_{\gamma-n}(G),\quad (k=1,2),$$

уравнение (2) мы можем записать в виде

$$\frac{\partial^{\beta,n}W}{\partial z^n}+\sum_{k=1}^{n-1}A_k(z)\frac{\partial^{\beta,n-k}W}{\partial z^{n-k}}+A_n(z)\cdot H_3(z,W)+B(z)\cdot H_4(z,\overline{W})=F_1(z),$$

где функции

$$H_3(z,W)=H_1(z,W)-H_1(z,0),$$

$$H_4(z,\overline{W})=H_2(z,\overline{W})-H_2(z,0)$$

удовлетворяют условиям (2), (3), а

$$F_1(z)=F(z)-A_n(z)\cdot H_1(z,0)-B(z)\cdot H_2(z,0)\in S_\gamma(G).$$

Мы отыскиваем решение уравнения (1) из класса

$$S_{\gamma-n}(G)\,\mathrm{I}\ W^n_{q,\beta}(G),\quad 2<q<\frac{2}{\gamma},\tag{4}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$\mathrm{Re}[t^{-m}W(z)]=g(t),\quad t\in\Gamma,\tag{5}$$

где m – целое число, $g(t)\in C^\alpha(\Gamma)$, $\alpha=1-\dfrac{2}{q}$.

Таким образом, мы рассматриваем здесь канонический вид обобщенной задачи Римана–Гильберта, к которому приводятся более общие случаи [7].

Задача Римана–Гильберта для уравнения (1) при $B(z)\equiv 0$ изучена в работе [8]. В зависимости от соотношения между m и n нам приходится формулировать эту задачу в различном виде.

а) Пусть $m\geq n$. Тогда рассмотрим задачу:

Задача A_1. Требуется найти решение уравнения (1) из класса (4), удовлетворяющее граничному условию (5).

Решение задачи A_1 будем искать в виде

$$W(z)=\left(\prod\nolimits_G^{\beta,m}U\right)(z)+\left(z\,|\,z\,|^\theta\right)^n\Phi\left(z\,|\,z\,|^\theta\right),\tag{6}$$

где

$$\left(\prod\nolimits_G^{\beta,m}U\right)(z)=\left(T_G^{\beta,n}U\right)(z)+\frac{(-1)^n(z\,|\,z\,|^\theta)^{2m-n+1}}{(1-\beta)^n\pi^n}\iint_G\frac{dG_{\zeta_1}}{\overline{\zeta}_1\left(1-\overline{\zeta}_1\,|\,\zeta_1\,|^\theta\ z\,|\,z\,|^\theta\right)}\cdot\iint_G\frac{dG_{\zeta_2}}{\overline{\zeta}_2\left(\overline{\zeta}_2\,|\,\zeta_2\,|^\theta-\overline{\zeta}_1\,|\,\zeta_1\,|^\theta\right)}\times$$

$$\times\iint_G\frac{dG_{\zeta_3}}{\overline{\zeta}_3\left(\overline{\zeta}_3\,|\,\zeta_3\,|^\theta-\overline{\zeta}_2\,|\,\zeta_2\,|^\theta\right)}\Lambda\cdot\iint_G\frac{dG_{\zeta_{n-1}}}{\overline{\zeta}_{n-1}\left(\overline{\zeta}_{n-1}\,|\,\zeta_{n-1}\,|^\theta-\overline{\zeta}_{n-2}\,|\,\zeta_{n-2}\,|^\theta\right)}\iint_G\frac{\overline{U(\zeta_n)}\,dG_{\zeta_n}}{\overline{\zeta}_n\left(\overline{\zeta}_n\,|\,\zeta_n\,|^\theta-\overline{\zeta}_{n-1}\,|\,\zeta_{n-1}\,|^\theta\right)},$$

$$\left(T_G^{\beta,k}U\right)(z)=\frac{(-1)^k\left(z\,|\,z\,|^\theta\right)^k}{(1-\beta)^k\pi^k}\iint_G\frac{dG_{\zeta_1}}{\zeta_1\left(\zeta_1\,|\,\zeta_1\,|^\theta-z\,|\,z\,|^\theta\right)}\times$$

$$\times\iint_G\frac{dG_{\zeta_2}}{\zeta_2\left(\zeta_2\,|\,\zeta_2\,|^\theta-\zeta_1\,|\,\zeta_1\,|^\theta\right)}\Lambda\cdot\iint_G\frac{U(\zeta_k)dG_{\zeta_k}}{\zeta_k\left(\zeta_k\,|\,\zeta_k\,|^\theta-\zeta_{k-1}\,|\,\zeta_{k-1}\,|^\theta\right)},$$

$$\theta=\frac{2\beta}{1-\beta},$$

$U(z)$ – новая неизвестная функция из $S_\gamma(G)$, $0<\gamma<1$, $\Phi(z')\in U_0(G')$; G' – образ области G при отображении $z'=z\,|\,z\,|^\theta$. Функцию $\Phi(z\,|\,z\,|^\theta)$ выбираем так, чтобы функция $W(z)$, представленная в виде (6), удовлетворяла условию (5). Для этого функцию $\Phi(z\,|\,z\,|^\theta)$ представим в виде

$$\Phi\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)=\left(D^{\beta}_{m-n}g\right)(z)+\Phi_{m}\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right), \qquad (7)$$

где

$$\left(D^{\beta}_{n}g\right)(z)=\frac{\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}g(t)\frac{t+z\,|\,z\,|^{\theta}}{t-z\,|\,z\,|^{\theta}}\cdot\frac{dt}{t},$$

$$\Phi_{m}\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)=\sum\left(\alpha_{k}\left(\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)^{k}-\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)^{2(m-n)-k}\right)+i\beta_{k}\left(\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)^{k}+\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)^{2(m-n)-k}\right)\right)+i\beta_{m-n}\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)^{m-n},$$

если $n\geq m+1$, $\Phi_{m}\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)=i\beta_{0}$, если $n = m$. Здесь α_{k},β_{k}, $(k=\overline{0,m-n-1})$, β_{m-n} – произвольные действительные числа.

Если подставим представление (7) в формулу (6), то функция $W(z)$, определяемая по формуле (6), автоматически удовлетворяет краевому условию (5). Подставив эту функцию $W(z)$ в уравнение (1), получим для $U(z)$ интегральное уравнение

$$U(z) = (P_4U)(z), \qquad (8)$$

где

$$\left(P_{4}U\right)(z)=-\sum_{k=1}^{n-1}A_{k}(z)\left(T^{\beta,k}_{G}\right)(z)-A_{n}(z)\cdot H_{1}\left(z,\left(\prod\nolimits^{\beta,m}_{G}U\right)(z)+\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)^{n}\Phi\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)\right)-$$

$$-B(z)\cdot H_{2}\left(z,\overline{\left(\prod\nolimits^{\beta,m}_{G}U\right)(z)}+\left(\bar{z}\,|\,z\,|^{\theta}\right)^{n}\overline{\Phi\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)}\right)+F(z).$$

Здесь функция $\Phi\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)$ определена по формуле (7).

При получении формулы (8) использованы следующие дифференциальные свойства оператора $\left(\prod\nolimits^{\beta,m}_{G}U\right)(z)$:

$$\frac{\partial^{\beta,l}}{\partial z^{l}}\left(\prod\nolimits^{\beta,m}_{G}U\right)(z)=\left(T^{\beta,n-1}_{G}U\right)(z),\quad \left(l=\overline{1,n-1}\right),$$

$$\frac{\partial^{\beta,n}}{\partial z^{n}}\left(\prod\nolimits^{\beta,m}_{G}U\right)(z)=U(z).$$

Оператор $(P_4U)(z)$ переводит пространство $S_{\gamma}(G)$, $0 < \gamma < 1$ в себя и для любых $U_1, U_2\in S_{\gamma}(G)$ справедлива оценка

$$\left\|\left(P_{4}U_{1}\right)(z)-\left(P_{4}U_{2}\right)(z)\right\|_{S_{\gamma}(G)}\leq M\cdot\left\|U_{1}-U_{2}\right\|_{S_{\gamma}(G)},$$

где

$$\mathrm{M}=\sum_{k=1}^{\mathrm{n-1}}\mathrm{M_k}\,\|\,A_{k}\,\|_{S_{k}(G)}+M_{n+1}\left(c_{1}\cdot\|\,A_{n}\,\|_{S_{n}(G)}+c_{2}\cdot\|\,B\,\|_{S_{n}(G)}\right),$$

$$M_{1}=\sup_{z\in G}\frac{|\,z\,|^{\gamma+\theta}}{(1-\beta)\pi}\iint\limits_{G}\frac{dG_{\zeta}}{|\,\zeta\,|^{1+\gamma}\cdot|\,\zeta\,|\,\zeta\,|^{\theta}-z\,|\,z\,|^{\theta}|},$$

$$M_{2}=\sup_{z\in G}\frac{|\,z\,|^{\gamma+2\theta}}{(1-\beta)^{2}\pi^{2}}\iint\limits_{G}\frac{dG_{\zeta_{1}}}{|\,\zeta_{1}\,|\cdot|\,\zeta_{1}\,|\,\zeta_{1}\,|^{\theta}-z\,|\,z\,|^{\theta}|}\iint\limits_{G}\frac{dG_{\zeta_{2}}}{|\,\zeta_{2}\,|^{1+\gamma}\cdot|\,\zeta_{2}\,|\,\zeta_{2}\,|^{\theta}-\zeta_{1}\,|\,\zeta_{1}\,|^{\theta}|},\Lambda,$$

$$M_n = \sup_{z\in G}\frac{|z|^{\gamma+n\theta}}{(1-\beta)^n\pi^n}\iint_G\frac{dG_{\zeta_1}}{|\zeta_1|\cdot|\zeta_1|\zeta_1|^\theta - z|z|^\theta|}\iint_G\frac{dG_{\zeta_2}}{|\zeta_2|\cdot|\zeta_2|\zeta_2|^\theta-\zeta_1|\zeta_1|^\theta|}\Lambda$$

$$\Lambda\iint_G\frac{dG_{\zeta_n}}{|\zeta_n|^{1+\gamma}|\zeta_n|\zeta_n|^\theta-\zeta_{n-1}|\zeta_{n-1}|^\theta|}+\sup_{z\in G}\frac{|z|^{(2m-n+1)(1+\theta)}}{(1-\beta)^n\pi^n}\iint_G\frac{dG_{\zeta_1}}{|\zeta_1|\cdot|1-\overline{\zeta}_1|\zeta_1|^\theta\ z|z|^\theta|}\times$$

$$\times\iint_G\frac{dG_{\zeta_3}}{|\zeta_2|\cdot|\zeta_2|\zeta_2|^\theta-\zeta_1|\zeta_1|^\theta|}\Lambda\ \cdot\iint_G\frac{dG_{\zeta_{n-1}}}{|\zeta_{n-1}|\cdot|\zeta_{n-1}|\zeta_{n-1}|^\theta-\zeta_{n-2}|\zeta_{n-2}|^\theta|}\times$$

$$\times\iint_G\frac{dG_{\zeta_n}}{|\zeta_n|^{1+\gamma}\left(\zeta_n|\zeta_n|^\theta-\zeta_{n-1}|\zeta_{n-1}|^\theta\right)}.$$

Поэтому при $M < 1$ в силу принципа сжатых отображений существует единственное решение уравнения (8) из класса $S_\gamma(G)$ Легко можно показать, что функция $W(z)$, определяемая по формулам (6), (7), принадлежит классу (4). Следовательно, имеет место

Теорема 1. *При $m \geq n$ и $M < 1$ задача A_1 всегда разрешима. Многообразие решений этой задачи может быть найдено по формулам (6), (7), где $U(z)$ – решение уравнения (8) из класса $S_\gamma(G)$.*

б) Пусть $m < n$. В этом случае формулу (6) мы не можем использовать сразу, так как тогда получится задача с отрицательным индексом. Поэтому сначала введем в рассмотрение функцию

$$V(z) = \left(z|z|^\theta\right)^{n-m}\cdot W(z).$$

Задачу Римана–Гильберта теперь поставим в следующем виде:

Задача A_2. Требуется найти решение уравнения (1), где $A_k(z)\in S_k(G)$, $(k=\overline{1,n})$, $A_n(z)\in S_n(G)$, $B(z)\in S_n(G)$, $F(z)\in S_{m-n+\gamma}(G)$, $0<\gamma<1$, $H_1(z,W)$ и $H_2(z,\overline{W})$ как функции от z, измеримы и существенно ограничены в G, относительно W удовлетворяют условиям (2), (3), из класса

$$S_{\gamma-m(1+\theta)}(G)\,\mathrm{I}\ W^n_{q,\beta}\left(G,(m-n)(1+\theta)\right),\tag{9}$$

удовлетворяющее граничному условию (5).

Функция $V(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^{\beta,n}W}{\partial z^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{A}_k(z)\frac{\partial^{\beta,n-k}W}{\partial z^{n-k}}+A_n(z)\cdot H_{n-m,1}(z,V)+B(z)\cdot H_{n-m,2}(z,\overline{V})=F_{n-m}(z),\ \ z\in G,\tag{10}$$

где

$$H_{n-m}(z,V)=\left(z|z|^\theta\right)^{n-m}\cdot H_1\left(z,\left(z|z|^\theta\right)^{n-m}V(z)\right),$$

$$H_{n-m,2}\left(z,\overline{V}\right)=\left(z|z|^\theta\right)^{n-m}\cdot H_2\left(z,\left(\overline{z}|z|^\theta\right)^{n-m}\overline{V(z)}\right),$$

$$F_k(z)=\left(z|z|^\theta\right)^kF(z),$$

и краевому условию

$$\mathrm{Re}[t^{-n}V(t)]=g(t),\ \ t\in\Gamma.\tag{11}$$

Задачи (10), (11) соответствуют задаче из пункта а) при $m = n$. Поэтому решение этой задачи из класса (9) имеет вид

$$V(z)=\left(\prod\nolimits_G^{\beta,n}U\right)(z)+\left(z|z|^\theta\right)^n\Phi\left(z|z|^\theta\right),\tag{12}$$

где $\Phi\left(z|z|^\theta\right)=\left(D_0^\beta g\right)(z)+i\beta_0$.

Функция, заданная по формуле (12), автоматически удовлетворяет условию (5). Если функцию, заданную по формуле (12), подставим в уравнение (10), то получим интегральное уравнение

$$U(z) = (P_5U)(z), \tag{13}$$

где

$$\left(P_5U\right)(z) = -\sum_{k=1}^{n-1} A_k(z)\left(T_G^{\beta,k}\right)(z) - A_n(z)\cdot H_1\left(z,\left(\prod\nolimits_G^{\beta,n}U\right)(z) + \left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)^n\cdot\Phi\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)\right) -$$

$$- B(z)\cdot H_2\left(z,\overline{\left(\prod\nolimits_G^{\beta,n}U\right)(z)} + \left(\bar{z}\,|\,z\,|^{\theta}\right)^n\cdot\overline{\Phi\left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)}\right) + F_{n-m}(z)\,.$$

Очевидно, что $F_{n-m}(z)\in S_\gamma(G)$. Оператор $(P_5U)(z)$ является сжатым в классе $S_\gamma(G)$ при $M < 1$. Следовательно, при $M < 1$ существует единственное решение уравнения (13) из класса $S_\gamma(G)$. Функция $V(z)$, определяемая по формуле (12), принадлежит классу (4). Поэтому из формулы $V(z) = \left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)^{n-m}\cdot W(z)$ следует, что функция $W(z)$ принадлежит классу (9). Итак, доказана

Теорема 2. *При $m < n$ и $M < 1$ задача A_2 всегда разрешима. Многообразие решений этой задачи может быть найдено по формуле $W(z) = \left(z\,|\,z\,|^{\theta}\right)^{n-m}\cdot V(z)$, где $V(z)$ определяется из (12), (13).*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абдыманапов С.А., Тунгатаров А.Б.* Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами. Алматы: Ғылым, 2005. 169 с.

2. *Тунгатаров А.Б.* К теории уравнения Карлемана-Векуа с сингулярной точкой // Математический сборник. 1993. Т. 184, № 3. С. 111-120.

3. *Тунгатаров А.Б.* К теории обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной точкой // Сиб. математический журнал. 1993. Т. 34, № 4. С. 207-216.

4. *Беркембаев Е.Н., Тунгатаров А.Б.* Об одном классе эллиптических систем на плоскости 2-го порядка с сингулярной точкой выше первого порядка // Вестник КазГУ им. аль-Фараби. Серия мат., мех., информ. 1998. №6. С. 147-152.

5. *Кисикова Н.М., Тунгатаров А. Б.* Об одном классе эллиптических систем 3-го порядка на плоскости с сингулярной точкой // Вестник КазГУ им. аль-Фараби. Серия мат., мех., информ. 1998. №10. С. 81-88.

6. *Тунгатаров А.Б.* Об одном классе эллиптических систем n-го порядка на плоскости с сингулярной точкой // Математический журнал. Алматы, 2001. Т. 1, №1. С. 94-99.

7. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 28 с.

8. *Абдыманапов С.А*. Задача Римана-Гильберта для одного класса нелинейных эллиптических систем *n*-го порядка на плоскости с сингулярной точкой // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Серия мат., мех., инф. 2005. № 4(47). С. 12-16.

Резюме

Негізгі тарауда Бельтрам операторы арқылы жазықтықтағы сингулярлық нүктелі *n*-реттегі сызықты емес эллиптикалық жүйенің бір класы үшін Риман-Гильберттің жинақтау есебінің шешілу мәселелері зерттелген. Көрсетілген есептің үздіксіз шешілу мүмкіндігінің жеткілікті жаздайы бар екені алынған.

Summary

In this work solved Riemann-Hilbert problem for the nonlinear n-order elliptic systems in the plane with singular point.

УДК 517.9

Евразийский университет им. Л. Н. Гумилева,
г. Астана

Поступила