Т. М. АЛДИБЕКОВ

ОБОБЩЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = p_i(t)y_i + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)y_k \qquad (1)$$

вообще с комплексными коэффициентами $p_i(t), p_{ik}(t), i \in \{1,...,n\}, k \in \{1,...,n\}$, которые являются непрерывными функциями на полуоси $J = [0,+\infty)$.

Мы следуем работе Перрона [1, с. 193]. Основы теории показателей Ляпунова изложены в [2], а также в обзоре [3].

Лемма 1. Если в системе (1) для любых $i \in \{1,...,n\}, k \in \{1,...,n\}$ выполняется условие

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)} = 0, \qquad (2)$$

где $\psi(t)$ – непрерывная положительная функция на J, то для любого $\alpha > 0$ существует такое $T_1 \in J$, что для любого $t \geq T_1$ имеют места неравенства

$$\frac{\operatorname{Re} p_i(t)}{\psi(t)}\left|y_i^2\right| - \frac{\alpha}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{y_i}y_k\right| \leq \frac{1}{2\psi(t)}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right|, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2\psi(t)}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right| \leq \frac{\operatorname{Re} p_i(t)}{\psi(t)}\left|y_i^2\right| + \frac{\alpha}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{y_i}y_k\right|, \quad (4)$$

где $i \in \{1,..., n\}$.

Доказательство. Умножим каждое из уравнений системы (1) на $\overline{y_i}$, где $\overline{y_i}$ – величина комплексная, сопряженная с y_i. Получим

$$\overline{y_i}y_i' = \overline{y_i}p_i(t)y_i + \overline{y_i}\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)y_k .$$

Следовательно, в силу равенств $\overline{y_i}y_i = |y_i|^2$, $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right| = \operatorname{Re}(\overline{y_i}y_i')$ имеем

$$\left|\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right| - \operatorname{Re}\left(p_i(t)|y_i|^2\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left|p_{ik}(t)\overline{y}_i y_k\right|. \quad (5)$$

Отсюда, разделив на $\psi(t)$, получим

$$\left|\frac{1}{2\psi(t)}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right| - \frac{\operatorname{Re}(p_i(t))}{\psi(t)}|y_i|^2\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)}\left|\overline{y_i}y_k\right|. \qquad (6)$$

Из (2) и (6) следует, что для любого $\alpha > 0$ существует такое $T_1 \in J$, что для любого $t \geq T_1$ и для любых $i \in \{1,..., n\}, k \in \{1,..., n\}$ имеет место

$$\left|\frac{1}{2\psi(t)}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right| - \frac{\operatorname{Re}(p_i(t))}{\psi(t)}\left|y_i^2\right|\right| \leq \frac{\alpha}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{y_i}y_k\right|.$$

Отсюда получаем неравенства (3) и (4). Лемма 1 доказана.

Для $\alpha > 0$, зафиксируем число $T_1 \in J$, найденное в лемме 1.

Лемма 2. Пусть для системы (1) при $\alpha > 0$ и для некоторой непрерывной положительной функции $\psi(t)$ на J выполняются следующие условия:

1) $\operatorname{Re} p_1(t) > \operatorname{Re} p_i(t) + \alpha\psi(t), t \in J, i \in \{2,...,n\}$,

2) $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)} = 0, i \in \{1,...,n\}, k \in \{1,...,n\}$.

Тогда существует решение $y_1, y_2,..., y_n$ системы (1) такое, что для любого $t \geq t_0$ выполняется неравенство $|y_1(t)|^2 > |y_i(t)|^2, i \in \{2,...,n\}, t_0 > T_1$.

Доказательство. Пусть $y_1, y_2,..., y_n$ – решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $y_i(t_0) = \eta_i, i \in \{1,...,n\}$, где $|\eta_1| > |\eta_i|$, $i \in \{2,...,n\}$, $t_0 > T_1$. Теперь докажем, что это решение искомое. Допустим противное. Пусть неравенство $|y_1(t)|^2 > |y_i(t)|^2, i \in \{2,...,n\}, t_0 > T_1$ имеет место в некотором полуинтервале $t_0 \leq t < t_2$ и в момент $t = t_2$ нарушается, т.е. для некоторого индекса $k \in \{2,..., n\}$ имеем

$$\left|y_1(t_2)\right|^2=\left|y_k(t_2)\right|^2\ge\left|y_i(t_2)\right|^2,\ i\ne 1, i\ne k, \quad (7)$$

притом

$$\left(\frac{d}{dt}\left|y_1\right|^2\right)_{t=t_2}\le\left(\frac{d}{dt}\left|y_k\right|^2\right)_{t=t_2}. \quad (8)$$

Так как $t_2>T_1$, то из неравенства (3) леммы 1 при $i=1, t=t_2$ следует, что

$$\frac{\operatorname{Re}p_1(t_2)}{\psi(t_2)}\left|y_1^2(t_2)\right|-\frac{\alpha}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{y_1}(t_2)y_k(t_2)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2\psi(t_2)}\left(\frac{d}{dt}\left|y_1^2\right|\right)_{t=t_2}.$$

Отсюда в силу (7) получим неравенство

$$\frac{\operatorname{Re}p_1(t_2)}{\psi(t_2)}\left|y_1^2(t_2)\right|-\frac{\alpha}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{y_1}(t_2)y_k(t_2)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2\psi(t_2)}\left(\frac{d}{dt}\left|y_k\right|^2\right)_{t=t_2}. \quad (9)$$

Также из неравенства (4) леммы 1 при $i=k$, $t=t_2$ следует, что

$$\frac{1}{2\psi(t_2)}\left(\frac{d}{dt}\left|y_k\right|^2\right)_{t=t_2}\le$$

$$\le\frac{\operatorname{Re}p_k(t_2)}{\psi(t_2)}\left|y_k^2(t_2)\right|+\frac{\alpha}{2n}\sum_{s=1}^{n}\left|\overline{y}_k(t_2)y_s(t_2)\right|.$$

В силу (7) для любого $s\in\{1,\ldots,n\}$ имеем

$$\left|\overline{y}_k(t_2)y_s(t_2)\right|=\left|\overline{y}_k(t_2)\right|\left|y_s(t_2)\right|=$$

$$=\left|y_1(t_2)\right|\left|y_s(t_2)\right|\le\left|y_1(t_2)\right|^2,$$

поэтому имеет место неравенство

$$\frac{1}{2\psi(t_2)}\left(\frac{d}{dt}\left|y_k\right|^2\right)_{t=t_2}\le$$

$$\le\frac{\operatorname{Re}p_k(t_2)}{\psi(t_2)}\left|y_1(t_2)\right|^2+\frac{\alpha}{2}\left|y_1(t_2)\right|^2. \quad (10)$$

Следовательно, учитывая (7), из неравенств (9) и (10) получаем, что

$$\frac{\operatorname{Re}p_1(t_2)}{\psi(t_2)}\left|y_1^2(t_2)\right|-\frac{\alpha}{2}\left|y_1(t_2)\right|^2\le$$

$$\le\frac{\operatorname{Re}p_k(t_2)}{\psi(t_2)}\left|y_1(t_2)\right|^2+\frac{\alpha}{2}\left|y_1(t_2)\right|^2.$$

Так как $\left|y_1(t_2)\right|\ge\left|y_i(t_2)\right|, i\ne 1;$ то $\left|y_1(t_2)\right|\ne 0$, поэтому полученное неравенство можно разделить на $\left|y_1(t_2)\right|^2$. Тогда имеем $\frac{\operatorname{Re}p_1(t_2)}{\psi(t_2)}-\frac{\alpha}{2}\le\frac{\operatorname{Re}p_k(t_2)}{\psi(t_2)}+\frac{\alpha}{2}$ или $\operatorname{Re}p_1(t_2)\le$ $\le\operatorname{Re}p_k(t_2)+\alpha\psi(t_2), k\in\{2,\ldots,n\}, t_2\in J$. Это неравенство непосредственно противоречит условию 1). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть для системы (1) при $\alpha>0$ и для некоторой непрерывной положительной функции $\psi(t)$ на J выполняются следующие условия:

$$1)\operatorname{Re}p_1(t)>\operatorname{Re}p_i(t)+\alpha\psi(t), t\in J, i\in\{2,\ldots,n\};$$

$$2)\lim_{t\to+\infty}\frac{\left|p_{ik}(t)\right|}{\psi(t)}=0, i\in\{1,\ldots,n\}, k\in\{1,\ldots,n\},$$

тогда существует решение $y_1,y_2,\ldots,y_n$ системы (1) такое, что

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\left|y_i\right|}{\left|y_1\right|}=0, i\in\{2,\ldots,n\}.$$

Доказательство. Зафиксированное число T_1 в леммах 1,2, используя условие 2), возьмем так, чтобы для любого $t>T_1$ также выполнялось неравенство

$$\frac{\left|p_{ik}(t)\right|}{\psi(t)}<\frac{\alpha\gamma}{16n}, i\in\{1,\ldots,n\}, k\in\{1,\ldots,n\}. \quad (11)$$

Рассмотрим решение $y_1,y_2,\ldots,y_n$, найденное в лемме 2. Из леммы 2 следует, что $\frac{\left|y_k\right|^2}{\left|y_1\right|^2}$ – ограниченная функция на J, поэтому конечный верхний предел существует. Покажем теперь, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\left|y_i\right|}{\left|y_1\right|}=0, i\in\{2,\ldots,n\}$. Допустим противное. Пусть для некоторого индекса $k\in\{2,\ldots,n\}$, $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2=\gamma>0$. Отсюда следует, что существует произвольно большое $t=\tau>T_1$, для которого одновременно имеют места неравенства

$$\left|\frac{y_k(\tau)}{y_1(\tau)}\right|^2>\frac{\gamma}{2};\frac{1}{\psi(\tau)}\left(\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2\right)_{t=\tau}>-\frac{\alpha\gamma}{2}. \quad (12)$$

В самом деле, прежде всего, очевидно, что не может, начиная с некоторого $t\in J$, иметь место неравенство $\frac{1}{\psi(t)}\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2<-\frac{\alpha\gamma}{2}$, так как тогда имели бы неравенство $\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2<0$, откуда $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2=-\infty$. Поэтому существуют произвольно большие $t=\tau>T_1$, для которых выполняется неравенство $\frac{1}{\psi(\tau)}\left(\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2\right)_{t=\tau}>-\frac{\alpha\gamma}{2}$.

Если для этих $t=\tau>T_1$, $\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2>\frac{\gamma}{2}$, то утверждение доказано. Допустим, для $\tau'>T_1$ имеет место неравенство $\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2<\frac{\gamma}{2}$. Так как $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2=\gamma$, то среди чисел $t=\tau>T_1$ существует наименьшее $\tau>T_1$, для которого $\left|\frac{y_k(\tau)}{y_1(\tau)}\right|\geq\frac{3}{4}\gamma$, и для этого $\tau>T_1$ имеем $\left(\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2\right)_{t=\tau}>-\frac{\alpha\gamma}{2}\psi(\tau)$. Следовательно, для этого $\tau>T_1$ имеют место неравенства (12).

Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2=\frac{1}{|y_1|^2}\frac{d}{dt}|y_k|^2-\frac{|y_k|^2}{|y_1|^4}\frac{d}{dt}|y_1|^2. \quad (13)$$

В ходе доказательства леммы 1 было получено неравенство (5)

$$\left|\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right|-\mathrm{Re}(p_i(t)|y_i|^2\ \right|\leq\sum_{k=1}^{n}\left|p_{ik}(t)\overline{y}_i y_k\right|.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right|\leq\mathrm{Re}(p_i(t)\left|y_i^2\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|p_{ik}(t)\overline{y}_i y_k\right|, \quad (14)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right|\geq\mathrm{Re}(p_i(t)\left|y_i^2\right|-\sum_{k=1}^{n}\left|p_{ik}(t)\overline{y}_i y_k\right|. \quad (15)$$

Из неравенства (14) при $i=k$ получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|y_k^2\right|\leq\mathrm{Re}(p_k(t)\left|y_k^2\right|+\sum_{s=1}^{n}\left|p_{ks}(t)\overline{y}_k y_s\right|. \quad (16)$$

Из неравенства (15) при $i=1$ после умножения на -1 получаем

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|y_1^2\right|\leq\sum_{s=1}^{n}\left|p_{1s}(t)\overline{y}_1 y_s\right|-\mathrm{Re}(p_1(t)\left|y_1^2\right|. \quad (17)$$

Следовательно, из (13) в силу (16) и (17) вытекает, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2=\frac{1}{|y_1|^2}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y_k|^2+\frac{|y_k|^2}{|y_1|^4}\left(-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y_1|^2\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{|y_1|^2}\left(\mathrm{Re}\,p_k(t)\left|y_k^2\right|+\sum_{s=1}^{n}\left|p_{ks}(t)\overline{y}_k y_s\right|\right)+$$

$$+\frac{|y_k|^2}{|y_1|^4}\left(\sum_{s=1}^{n}\left|p_{1s}(t)\overline{y}_1 y_s\right|-\mathrm{Re}\,p_1(t)\left|y_1^2\right|\right)=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\frac{\left|p_{ks}(t)\overline{y}_k y_s\right|}{|y_1|^2}+\mathrm{Re}\left(p_k(t)\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2\right)+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\frac{\left|p_{1s}(t)\overline{y}_1 y_s\right|}{|y_1|^4}|y_k|^2-\mathrm{Re}\left(p_1(t)\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2\right)$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2+\mathrm{Re}(p_1(t)-p_k(t))\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2\leq$$

$$\leq\sum_{s=1}^{n}\frac{\left|p_{ks}(t)\overline{y}_k y_s\right|}{|y_1|^2}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\left|p_{1s}(t)\overline{y}_1 y_s\right|}{|y_1|^4}|y_k|^2. \quad (18)$$

В силу леммы 2 $|y_i|<|y_1|, i\in\{2,\ldots,n\}$, то из (18) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2+\mathrm{Re}(p_1(t)-p_k(t))\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2\le$$
$$\le\sum_{s=1}^{n}\left|p_{ks}(t)\right|+\sum_{s=1}^{n}\left|p_{1s}(t)\right|.$$

Отсюда в силу условия 1) леммы имеет место неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2+\alpha\psi(t)\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2\le$$
$$\le\sum_{s=1}^{n}\left|p_{ks}(t)\right|+\sum_{s=1}^{n}\left|p_{1s}(t)\right|.$$

Разделив на $\psi(t)$, получим

$$\frac{1}{2\psi(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2+\alpha\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2\le$$
$$\le\sum_{s=1}^{n}\frac{\left|p_{ks}(t)\right|}{\psi(t)}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\left|p_{1s}(t)\right|}{\psi(t)}. \qquad (19)$$

Тогда из (19) при $t=\tau>T_1$ в силу (12) следует, что

$$-\frac{\alpha\gamma}{4}+\frac{\alpha\gamma}{2}\le\sum_{s=1}^{n}\frac{\left|p_{ks}(\tau)\right|}{\psi(\tau)}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\left|p_{1s}(\tau)\right|}{\psi(\tau)}.$$

Отсюда, учитывая (11), получаем $\frac{\alpha\gamma}{4}\le\sum_{s=1}^{n}\frac{\alpha\gamma}{16n}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\alpha\gamma}{16n}$ т.е. $\frac{1}{4}\le\frac{1}{8}$.

Тем самым полученное противоречие доказывает лемму. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть для системы (1) для некоторой непрерывной положительной функции $\psi(t)$ на J выполняются следующие условия:

1) $\mathrm{Re}\,p_1(t)>\mathrm{Re}\,p_i(t)+\alpha\psi(t), t\in J,$

$i\in\{2,\dots,n\},\alpha>0,\psi(t)\ge\beta>0,$

2) $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\left|p_{ik}(t)\right|}{\psi(t)}=0, i\in\{1,\dots,n\}, k\in\{1,\dots,n\},$

тогда существует решение $y_1,y_2,\dots,y_n$ системы (1) такое, что

$$\lim_{t\to+\infty}\left|\frac{1}{\psi(t)}\frac{y_1'}{y_1}-\frac{p_1(t)}{\psi(t)}\right|=0.$$

Доказательство. Первое уравнение системы (1) имеет вид

$$y_1'=p_1(t)y_1+p_{11}(t)y_1+$$
$$+p_{12}(t)y_2+\dots+p_{1n}(t)y_n.$$

Рассмотрим решение $y_1,y_2,\dots,y_n$ из леммы 3. Подставляя это решение в уравнение и учитывая, что $y_1(t)\ne0,\psi(t)\ne0,t\ge t_0\in J$, получаем неравенство

$$\left|\frac{1}{\psi(t)}\frac{y_1'}{y_1}-\frac{p_1(t)}{\psi(t)}\right|\le\frac{\left|p_{11}(t)\right|}{\psi(t)}+\sum_{k=2}^{n}\frac{\left|p_{1k}(t)\right|}{\psi(t)}\frac{\left|y_k\right|}{\left|y_1\right|}.$$

Следовательно, в силу леммы 3 и из условия 2) вытекает утверждение леммы. Лемма 4 доказана.

Далее рассмотрим систему (1) с действительными коэффициентами. Используя лемму 4, легко доказывается следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть для системы (1) для некоторой непрерывной положительной функции $\psi(t)$ на *J* выполняются следующие условия:

1) $\mathrm{Re}\,p_1(t)>\mathrm{Re}\,p_i(t)+\alpha\psi(t), t\in J,$

$i\in\{2,\dots,n\},\alpha>0,\psi(t)\ge\beta>0,$

2) $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\left|p_{ik}(t)\right|}{\psi(t)}=0, i\in\{1,\dots,n\}, k\in\{1,\dots,n\},$

3) $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\int_0^t p_1(\tau)d\tau=\lambda_1(q),\ \ \lambda_1(q)\in R,$

где

$$q(t)=\int_0^t\psi(\tau)d\tau.$$

Тогда система (1) имеет решение $\overline{y}=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ такое, что

$$\chi[y_1,q]=\lambda_1(q),$$

где $\chi[y_1,q]$ – верхний обобщенный характеристический показатель Ляпунова первой координатной функции $y_1(t)$ относительно $q(t)$.

Теорема 1. Пусть для системы (1)

$$\frac{dy_i}{dt}=p_i(t)y_i+\sum_{k=1}^{n}p_{ik}(t)y_k,$$

где коэффициенты – непрерывные действительные функции, определенные на полуоси $J=[0,+\infty)$, $i\in\{1,\dots,n\}$, для некоторой непрерывной положительной функции $\psi(t)$ на J выполняются условия:

$$1)\ \operatorname{Re} p_1(t) > \operatorname{Re} p_i(t) + \alpha\psi(t), t \in J,$$
$$i \in \{2, ..., n\}, \alpha > 0, \psi(t) \geq \beta > 0,$$

$$2)\ \lim_{t\to+\infty} \frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)} = 0, i \in \{1,...,n\}, k \in \{1,...,n\},$$

$$3)\ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \int_0^t p_1(\tau)d\tau = \lambda_1(q),$$

где $q(t) = \int_0^t \psi(\tau)d\tau$, тогда система (1) имеет решение $\bar{y} = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ такое, что $\chi[\bar{y}, q] = \lambda_1(q)$.

Доказательство. Рассмотрим решение $\bar{y} = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ из леммы 5. В силу леммы 2 для любых $t > t_0, i \in \{2,...,n\}$ имеет место неравенство $|y_1(t)| > |y_i(t)|$. Поэтому из свойства показателей относительно $q(t)$ имеет место равенство $\chi[y_1, q] = \chi[\bar{y}, q]$. Отсюда из леммы 5 следует требуемое равенство. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть для системы

$$\frac{dy_i}{dt} = p_i(t)y_i + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)y_k, \qquad (20)$$

где коэффициенты – непрерывные действительные функции, определенные на полуоси $J = [0, +\infty)$, $i \in \{1,...,n\}$, для некоторой непрерывной, положительной функции $\psi(t)$ в J выполняются условия:

$$1)\ \operatorname{Re} p_i(t) > \operatorname{Re} p_{i+1}(t) + \alpha\psi(t), t \in J,$$
$$i \in \{1, 2, ..., n-1\}, \alpha > 0, \psi(t) \geq \beta > 0,$$

$$2)\ \lim_{t\to+\infty} \frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)} = 0, i \in \{1,...,n\}, k \in \{1,...,n\},$$

тогда система (20) имеет n линейно независимых решений $\bar{y}_k = \{y_{1k}, y_{2k}, ..., y_{nk}\}, k = 1,2,...,n;$ удовлетворяющих равенствам:

$$a)\ \lim_{t\to+\infty} \frac{y_{\mu k}}{y_{kk}} = 0, \mu \neq k,$$

$$b)\ \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{\psi(t)} \frac{y'_{kk}}{y_{kk}} - \frac{p_k(t)}{\psi(t)} \right) = 0.$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по $k = 1,...,n$. Пусть $k = 1$. Тогда в силу леммы 3 и леммы 4 система (20) имеет решение

$$y_1 = y_{11}; y_2 = y_{21}; ...; y_n = y_{n1} \qquad (21)$$

и утверждения *a*) и *b*) теоремы выполняются.

Пусть утверждения *a*) и *b*) теоремы выполняются для любого $k < n$. Положим

$$y_1 = y_{11}\int u dt, y_2 = y_{21}\int u dt + z_1, ..., y_n =$$
$$= y_{n1}\int u dt + z_{n-1}, \qquad (22)$$

где $\bar{y}_1 = \{y_{11}, y_{21}, ..., y_{n1}\}$ – решение (21). Тогда после этой подстановки система (20) переходит в систему

$$\frac{dz_{\lambda-1}}{dt} = p_\lambda z_{\lambda-1} + \sum_{\mu=2}^{n} \left(p_{\lambda\mu}(t) - p_{1\mu}(t)\frac{y_{\lambda 1}}{y_{11}} \right) z_{\mu-1},$$
$$(\lambda = 2,3,...,n). \qquad (23)$$

Заметим, что $p_\lambda(t) > p_{\lambda+1}(t) + \alpha\psi(t)$, $(\lambda = 2,3,...,n-1)$. Далее

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\left| p_{\lambda\mu}(t) - p_{1\mu}(t)\dfrac{y_{\lambda 1}}{y_{11}} \right|}{\psi(t)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left| \frac{p_{\lambda\mu}(t)}{\psi(t)} - \frac{p_{1\mu}(t)}{\psi(t)} \frac{y_{\lambda 1}}{y_{11}} \right| = 0.$$

Таким образом, для системы (23) условия теоремы 2 выполняются. Система (23) состоит из $k = n - 1$ уравнений. Поэтому по индукции система (23) имеет фундаментальную систему решений, удовлетворяющих утверждению теоремы. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть для системы

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)y_k, k = 1,...,n, \qquad (24)$$

где коэффициенты – непрерывные действительные функции, определенные на полуоси $J = [0, +\infty)$, для некоторой непрерывной положительной функции $\psi(t)$ на J, выполняются условия:

$$1)\ p_{k-1,k-1}(t) - p_{kk}(t) \geq \alpha\psi(t), t \in J,$$
$$k \in \{2, ..., n\}, \alpha > 0, \psi(t) \geq \beta > 0,$$

$$2)\lim_{t\to+\infty}\frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)}=0, i\in\{1,...,n\}, k\in\{1,...,n\}, i\neq k,$$

$$3)\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau=\lambda_k(q); k=\overline{1,n}.$$

где $q(t)=\int_0^t \psi(\tau)d\tau$, тогда система (24) имеет фундаментальную систему решений $\overline{y}_1,\overline{y}_2,...,\overline{y}_n$ такую, что $\chi[\overline{y}_k,q]=\lambda_k(q), k=\overline{1,n}.$

Доказательство. В силу условия теоремы и из теоремы 2 следует, что существует фундаментальная система решений (24),

$\overline{y}_k=\{y_{1k},y_{2k},...,y_{nk}\}, k=\overline{1,n}$ такая, что:

$$a)\lim_{t\to+\infty}\frac{y_{ik}}{y_{kk}}=0, i\neq k;$$

$$b)\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\psi(t)}\frac{y'_{kk}}{y_{kk}}-\frac{p_{kk}(t)}{\psi(t)}\right)=0.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $T\in J$, что для любых $t>T$, $k=1,...,n$ имеют места неравенства

$$p_{kk}(t)-\varepsilon\psi(t)<\frac{y'_{kk}}{y_{kk}}<p_{kk}(t)+\varepsilon\psi(t).$$

Интегрируя, получаем неравенства

$$\frac{1}{q(t)}\int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau-\varepsilon<\frac{1}{q(t)}\ln\frac{|y_{kk}(t)|}{|y_{kk}(0)|}<$$

$$<\frac{1}{q(t)}\int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau+\varepsilon.$$

Отсюда в силу условия 3) теоремы имеем

$$\lambda_k(q)-\varepsilon<\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\ln|y_{kk}(t)|<\lambda_k(q)+\varepsilon. \quad (25)$$

Легко проверить, что

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\ln|y_{kk}(t)|=\chi[\overline{y}_k,q].$$

Поэтому из (25) в силу произвольности $\varepsilon>0$ получаем требуемое равенство. Теорема 3 доказана.

Следствие 1. В условиях теоремы 3 фундаментальная система решений $\overline{y}_1,\overline{y}_2,...,\overline{y}_n$ образует нормальный базис системы (24), т.е. $\lambda_k(q), k=\overline{1,n}$, являются [4–6] обобщенными показателями системы (24).

Следствие 2. В условиях теоремы 3 обобщенные показатели системы (24) вычисляются по формуле

$$\lambda_k(q)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau, k=\overline{1,n}.$$

Следствие 3. Если в условиях теоремы 3

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\int_0^t p_1(\tau)d\tau<0,$$

где $q(t)=\int_0^t \psi(\tau)d\tau$, то система (24) асимптотически устойчива.

Следствие 4. Если в условиях теоремы 3

$$\lambda_k(q)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau<0,$$

где $q(t)=\int_0^t \psi(\tau)d\tau$, $1<k\leq n$, то система (24) имеет k-мерное условно-устойчивое подпространство решений.

Теорема 4. Если в теореме 3 в условии 3) существует точный предел, то система (24) обобщенно-правильная по Ляпунову относительно $q(t)$.

Доказательство. В самом деле, для фундаментальной системы решений $\overline{y}_1,\overline{y}_2,...,\overline{y}_n$ в теореме 3 выполняются следующие равенства:

$$\sum_{k=1}^n\chi[\overline{y}_k,q]=\sum_{k=1}^n\lambda_k(q)=\sum_{k=1}^n\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{q(t)}\int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{q(t)}\int_0^t\sum_{k=1}^n p_{kk}(\tau)d\tau,$$

поэтому система (24) обобщенно-правильная [5] по определению. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Пусть система

$$y'=P(t)y+f(t,y) \quad (24)$$

удовлетворяет следующим условиям: 1) соответствующая линейная однородная система удовлетворяет условиям теоремы 4; 2) $\lambda_1(q)<0$; 3) функция $f(t,y)$ непрерывна по $t\in J$ и непрерывно дифференцируема по y в области $|y|\leq h$ и удовлетворяет неравенству $|f(t,y)|\leq\varphi(t)|y|^m$, где $m>1$, $\varphi(t)$ – непрерывная положительная функция при $t\in J$ с нулевым обобщенным показателем

Ляпунова относительно $q(t)$. Тогда нулевое решение нелинейной системы (24) экспоненциально устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что все требования аналога теоремы Ляпунова для неограниченных систем дифференциальных уравнений [4, 6] выполняются, откуда следует утверждение. Теорема 5 доказана.

Замечание. Теоремы 1–3 являются обобщениями теоремы Перрона [1, с. 193], который доказал совпадение показателей возмущенной и исходной системы с ограниченными коэффициентами при условии разделенности диагонали.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1949. С. 550.

2. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. С. 576.

3. *Изобов Н.А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники (Мат. анализ). М., 1974. Т. 12. С. 71-146.

4. *Алдибеков Т.М.* Об оценке роста решений системы дифференциальных уравнений // Математический журнал. Алматы, 2001. Т. 1, №2. С. 10-14.

5. *Алдибеков Т.М.* Обобщенно-правильные системы дифференциальных уравнений // Математический журнал. Алматы, 2002. Т. 2, №2. С. 19-24.

6. *Алдибеков Т.М.* Аналог теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, №6. С. 859-860.

Резюме

Жүйенің коэффициенттері бойынша жалпылама көрсеткіштерді есептеу мүмкін болатын дифференциалдық теңдеулер класы көрсетілген. Дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпылама дұрыс болуының коэффициенттік белгісі келтірілген. Сызықты емес жүйенің нөлдік шешімінің орнықты болуының жеткілікті шарты анықталған.

Summary

The work displays class of differential equations, where a generalized index on coefficients of system calculation is possible. Coefficient characteristic of generalized correctness of differential equation system is given. Sufficient condition for stability of null resolution of nonlinear system is determined.

УДК 517.938

КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 8.11.06г.