Б. РЫСБАЙУЛЫ, А. АДАМОВ

СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В МНОГОСЛОЙНОЙ ОБЛАСТИ

Постановка задачи. В области $\Omega = (0,H) \cup (0,T)$ рассматривается задача

$$c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}), \ 0 < z < H, \ t \subseteq (0,t_0), \quad (1)$$

$$T(z,0) = T_0(z), \quad 0 < z < H, \quad (2)$$

$$\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z_i} = 0, \ i=1, 2, \ldots, k, \quad (3)$$

$$T(0, t) = T_1, \ 0 < t < t_0, \quad (4)$$

где $[f] = f(z+0,t) - f(z-0,t)$ – разрыв функции, T_1 = const, k – число слоя.

Под влиянием внешней температуры в многослойной области образуются талые, фазовые и мерзлые зоны. Границу талой и фазовой зоны обозначим через h(z), а границу фазовой и мерзлой зоны – через h_1(z). Температура границы h(z) постоянна и равна θ, а температура h_1(z) также постоянна и равна θ_1, причем $\theta_1 < \theta$. В численных расчетах мы рассматриваем трехслойные грунты, т.е. k=2. Дальнейшие наши рассуждения справедлива для любого k.

На поверхности грунта ставятся краевые условия третьего порядка:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = -\alpha(T - T_0(z)), \quad (5)$$

где $T_0(z)$ – температура окружающей среды (в нашем случае воздух).

На границе $z = h(t)$ справедливо

$$\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right] = p\frac{dh}{dz}, \quad (6)$$

а на границе z=h_1(z) справедливо равенство

$$\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right] = 0. \quad (7)$$

Кроме этого, коэффициенты уравнений (1) являются переменными, причем

$$c = c(T),\ \lambda = \lambda\,(T). \tag{8}$$

Зависимость (8) является нелинейной.

В численных расчетах мы использовали эмпирические формулы, составленные на основе экспериментальных данных. Из определения функции $c = c(T)$ и $\lambda = \lambda\,(T)$ следует, что если $|T| < \infty$, то

$$0 < c_0 \le c(T) \le c_1,\ 0 < \lambda_0 \le \lambda(T) \le \lambda_1,$$

$$\left|\frac{\partial c(T)}{\partial T}\right| \le c_2,\ \left|\frac{\partial \lambda(T)}{\partial T}\right| \le \lambda_2. \tag{9}$$

Ясно, что выписать решения задачи (1)–(9) в явном виде не представляется возможным. поэтому эту задачу решаем приближенно. Следует отметить, что теорема существования решении задачи (1)–(9) пока еще не существует. Область $\Omega = (0,H) \cup (0,t_0)$ разбивается на сетки

$$\omega = \left\{ z_{i-\frac{1}{2}} = (1-\frac{1}{2})h; t_j = j\Delta t;\right.$$

$$\left. i = 1,2,\ldots,N;\ j = 1,2,\ldots,M \right\};$$

$$h = \frac{H}{N};\quad \Delta t = \frac{t_0}{M}.$$

Считаем, что точка разрыва z_i совпадает с целым узлом z_i, i = 1,2,…,k. Еще раз напоминаем, что в расчетах мы использовали случай $k = 2$.

Разностные схемы для задачи (1)–(9):

$$c(\check{Y}_{i-\frac{1}{2}})\gamma Y_{i\bar{t}} = (\lambda(\check{Y}_{i-\frac{1}{2}})Y_{i\bar{x}})_x,\ i \in I, j \in J, \tag{10}$$

$$Y_{i-\frac{1}{2}} = T_0(z_{i-\frac{1}{2}}),\ i \in I, \tag{11}$$

$$Y^0_{i-\frac{1}{2}} = T_1,\ i \in I, \tag{12}$$

$$\lambda(\check{Y}_{N-\frac{1}{2}})\frac{Y_N - Y_{N-1}}{h} = -\alpha(Y_N - T_0(t_j)), \tag{13}$$

где $Y_i = Y(z_i, t_{j+1}),\qquad \check{Y}_i = Y(z_i, t_j)$,

$\check{Y}_{i-\frac{1}{2}} = (\check{Y}_i + \check{Y}_{i-1})/2$ – дискретные функции.

Теорема. Пусть $T(z,\ t)$ является решением задачи (1)–(9). Тогда, если $T(z,t) \in \overline{W}_2^{\,2}(0,t_0,\overline{W}_2^{\,3}(0,H))$, то решение приближенной задачи (10)–(13) сходится к решению исходной задачи со скоростью O(Δz+h) и справедлива оценка

$$\max_t \|T - Y\| + \sum_t \|T_x - Y_x\|^2 \Delta t \le C_1((\Delta t)^2 + h^2).$$

Доказательство. Проинтегрируем уравнение (1) записанное на слое $t=(n+1)\ \Delta t$ по z от $z_{1-\frac{1}{2}}$ до $z_{1+\frac{1}{2}}$. Тогда

$$\frac{1}{h}\int_{z_{1-1/2}}^{z_{1+1/2}} c\gamma \frac{\partial T(\xi,t)}{\partial t} d\xi = \frac{1}{h}(\sigma_{1+1/2} - \sigma_{1-1/2}) = \sigma_x,$$

где $\sigma = \lambda \dfrac{\partial T}{\partial z}$, ¦U¦=$(\sum_i \|U_i\|^2 h)^{1/2}$.

Для разности U=T−Y справедливо соотношение

$$c\gamma U_{\bar{t}} = (\lambda(T_{1-1/2})\frac{\partial T(z_{i-1/2},t_{j+1})}{\partial z} - \lambda(\check{Y}_{1-1/2})Y_{i\bar{z}})_z + \psi_1,$$

$$\psi_1 = \frac{1}{h}\int_{z_{1-1/2}}^{z_{1+1/2}} c\gamma \left[\frac{\partial T(\xi,t)}{\partial t} - T_{\bar{t}}(z_i,t)\right] d\xi. \tag{14}$$

Преобразуем

$$\lambda(T_{1-1/2})\frac{\partial T(z_{i-1/2},t_{j+1})}{\partial z} - \lambda(\check{Y}_{1-1/2})Y_{i\bar{z}} =$$

$$= \lambda(T_{1-1/2})\left[\frac{\partial T(z_{i-1/2},t_{j+1})}{\partial z} - T_{iz}\right] +$$

$$+ \left[\lambda(T_{i-1/2}) - \lambda(\check{Y}_{i-1/2})\right]T_{iz} + \lambda(\check{Y}_{i-1/2})U_{i\bar{z}} =$$

$$= \psi_2 + \psi_3 + \lambda(\check{Y}_{i-1/2})U_{i\bar{z}},$$

где

$$\psi_2 = \lambda(T_{1-1/2})\left[\frac{\partial T(z_{i-1/2},t_{j+1})}{\partial z} - T_{iz}\right],$$

$$\psi_3 = \left[\lambda(T_{i-1/2}) - \lambda(\check{Y}_{i-1/2})\right]T_{iz}.$$

Из условия теоремы следует, что

$$\|\psi_1\|^2 \le C_4(\Delta t)^2,\quad \|\psi_2\|^2 \le C_5 h^2,$$

$$\|\psi_3\|^2 \le C_6\|T_{\bar{t}}\|^2(\Delta t)^2 + C_7\|U\|^2.$$

Поэтому из (2.14) получим

$$c\gamma U_{\bar t} = (\lambda(\check{Y}_{i-1/2})U_{\bar z} + \psi_2 + \psi_3)_z + \psi_1 . \quad (15)$$

Рассмотрим разность $T(z,t) - T_1$. Данная функция обращается в нуль при $z = 0$, функцию $T(z,t) - T_1$ и $Y_i - T_1$ обозначим заново через $T(z,t)$ и Y_i. После этого умножим (15) на $2Uh\Delta t$ и суммируем по всем точкам i и j области сетки $\omega h\Delta t$:

$$2\sum_{i,j} U_{\bar t} \cdot Uh\Delta t = 2\sum_{i,j} (\lambda U_{\bar z} + \psi_2 + \psi_3)Uh\Delta t / c\gamma +$$

$$+ 2\sum_{i,j} \psi_1 Uh\Delta t / c\gamma . \quad (16)$$

Из условий (5) и (13) следует равенство

$$\lambda(\check{Y}_{N-1/2})U_{N\bar z} = -\psi_{2,N} - \psi_{3,N} - \alpha U_N . \quad (17)$$

Применяя к правой части равенства (16) формулы суммирования по частям, получаем

$$2\sum_{i,j} U_{\bar t} \cdot Uh\Delta t = -2\sum_{i,j} (\lambda U_{\bar z} + \psi_2 + \psi_3)\frac{U_{\bar z}}{c\gamma} h\Delta t -$$

$$-2\sum_{i,j} (\lambda U_{\bar z} + \psi_2 + \psi_3)U\left(\frac{1}{c\gamma}\right)_{\bar z} h\Delta t +$$

$$+ 2\sum_{i,j} \psi_1 \frac{U}{c\gamma} h\Delta t .$$

Из последнего, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\|U\|^2 - \|\breve{U}\|^2 + 2\|U_{\bar z}\|\Delta t \le C_5 \|U_{\bar z}\|(\|\psi_2\| + \|\psi_3\|)\Delta t +$$

$$+ C_6 \|U_{\bar z}\| \|U\| \max_i |T_z| \Delta t + C_7 \|U\| \|\psi_1\| \Delta t . \quad (18)$$

Из условия теоремы следует неравенство $\max_i |T_z| \le C_8 < \infty$, поэтому из (18), применяя ε-неравенство Коши, выводим

$$\|U\|^2 + 2\sum_t \|U_{\bar z}\|^2 \Delta t \le \varepsilon \sum_t \|U_{\bar z}\|^2 \Delta t +$$

$$+ C_9 \sum_t \|U\|^2 \Delta t + C_{10} \sum_t (\|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2 + \|\psi_3\|^2)\Delta t .$$

Из последнего, применяя лемму Грануоллы, получаем оценку

$$\max_i \|U\|^2 + \sum_t \|U_{\bar z}\|^2 \Delta t \le C_{11}(h + \Delta t)^2 \quad (19)$$

или

$$\max_i \left\|T(z_i, t_j) - Y_i^j\right\|^2 + \sum_t \left\|T(z_i, t_j)_{\bar z} - Y_{i\bar z}^j\right\|^2 \Delta t \le$$

$$\le C_{11}(h + \Delta t)^2 ,$$

т.е. при $h, \Delta t \to 0$ решение задачи (10)–(13) сходится к решению задачи (1)–(9).

Замечание 1. Разностная схема включают в себя условия (3), (6) и (7), поэтому к сумме (16) можно применить формулу суммирования по частям.

Замечание 2. Если условие (5) аппроксимируется выражением

$$\lambda_{N-1/2} \frac{Y_N - Y_{N-1}}{h} = -\alpha\left(\frac{Y_N + Y_{N-1}}{2} - T_0(t_j)\right),$$

$$E = \frac{\alpha h}{\lambda} < 1,$$

тогда

$$Y_N = \frac{1 - E}{1 + E} Y_{N-1} + \frac{E}{1 + E} T_0(t_j) .$$

В этом случае утверждение теоремы остается в силе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бэр Я., Заславский Д., Ирмей С.* Физико-математические основы фильтраций воды. М.: Мир, 1971. 451 с.
2. *Рубинштейн Л.И.* Проблема Стефана. Рига: Звайгзне, 1967. 457 с.
3. *Мейрманов А.М.* Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.
4. *Рысбайулы Б.* Метод конечных разностей для одномерного теплопроводного вязкого сжимаемого газа с контактным разрывом // Сибирский журнал вычислительной математики СО РАН. 2001. Т. 4, №3. С. 295-303.
5. *Адамов А.А.* Сходимость приближенного метода обобщенной задачи Стефана // Вестник ЕНУ. 2005. № 2(42). С. 45-50.
6. *Рысбайулы Б., Адамов А.А.* Сходимость приближенного метода расчета промерзания грунтов земельного полотна // Вестник НАН РК. 2005. №4. С. 54-57.

Резюме

Көп қабатты жер қыртысындағы кондуктивті жылу алмасу теңдеуіне айырымдық схема ұсынылады. Жуық есептің шешімі алғашқы есептің шешіміне жинақталатыны Соболев кеңістігінде дәлелденеді.

Summary

In activity suggested a difference scheme for equations of conductive thermoexchange in multilayer area. The convergence of an approximated problem's solution to the solution of an initial problem in Sobolev spaces are demonstrated.

Поступила 26.10.06г.