А. М. САРСЕНБИ

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Все рассматриваемые вопросы связаны с дифференциальным уравнением второго порядка с отклоняющимся аргументом следующего вида:

$$-u''(x) = \lambda u(-x), \quad -1 \le x \le 1. \qquad (1)$$

От решений уравнения (1) мы будем требовать удовлетворения краевых условий:

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(-1) + \beta_1 u'(1) + \alpha_{11} u(-1) + \beta_{11} u(1) = 0, \\ \qquad \alpha_{21} u(-1) + \beta_{21} u(1) = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

где коэффициенты краевых условий подчинены требованиям

$$|\alpha_1| + |\beta_1| > 0, \quad \alpha_1^2 \ne \beta_1^2, \quad \alpha_{21}^2 \ne \beta_{21}^2.$$

Одно из выписанных краевых условий содержит значения производной искомой функции, а другое не содержит значений производной.

Легко проверить, что линейно независимыми решениями уравнения (1) являются функции

$$u_1(x) = e^{\rho \cdot x} - e^{-\rho \cdot x}, \quad u_2(x) = e^{i\rho \cdot x} + e^{-i\rho \cdot x},$$

где $\rho^2 = \lambda$.

Линейные формы, порождающие краевые условия (2), обозначим через

$$U_1(u) = \alpha_1 u'(-1) + \beta_1 u'(1) + \alpha_{11} u(-1) + \beta_{11} u(1);$$

$$U_2(u) = \alpha_{21} u(-1) + \beta_{21} u(1).$$

Собственная функция $u(x)$ краевой задачи (1), (2), соответствующая данному собственному значению $\rho^2 = \lambda$, может быть представлена в виде

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \qquad (3)$$

где c_1, c_2 являются нетривиальными решениями однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} c_1 U_1(u_1) + c_2 U_1(u_2) = 0, \\ c_1 U_2(u_1) + c_2 U_2(u_2) = 0, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, получается путем подстановки выражения (3) в краевые условия (2). Ясно, что полученная однородная система имеет ненулевые решения, когда определитель этой системы

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(u_1) & U_1(u_2) \\ U_2(u_1) & U_2(u_2) \end{vmatrix}$$

равен нулю. Поэтому мы будем искать нули этого определителя. Для этого вместо $U_i(u_j)$ подставим соответствующие значения этих форм, которые имеют вид:

$$U_1(u_1)=\left(\alpha_1\rho+\alpha_{11}+\beta_1\rho-\beta_{11}\right)\cdot e^{-\rho}+$$
$$+\left(\alpha_1\rho-\alpha_{11}+\beta_1\rho+\beta_{11}\right)\cdot e^{\rho},$$
$$U_1(u_2)=\left(\alpha_1 i\rho+\alpha_{11}-\beta_1 i\rho+\beta_{11}\right)\cdot e^{-i\rho}+$$
$$+\left(-\alpha_1 i\rho+\alpha_{11}+\beta_1 i\rho+\beta_{11}\right)\cdot e^{i\rho},$$
$$U_2(u_1)=\left(\alpha_{21}-\beta_{21}\right)\cdot e^{-\rho}+\left(-\alpha_{21}+\beta_{21}\right)\cdot e^{\rho},$$
$$U_2(u_2)=\left(\alpha_{21}+\beta_{21}\right)\cdot e^{-i\rho}+\left(\alpha_{21}+\beta_{21}\right)\cdot e^{i\rho},$$

и приравняем к нулю получающееся при этом выражение. В результате получим следующее уравнение для определения собственных значений краевой задачи (1), (2):

$$(1-i)\rho\cdot\left[\left(\alpha_1\alpha_{21}+\beta_1\beta_{21}\right)+(1+i)\rho\cdot\left(\alpha_1\beta_{21}+\beta_1\alpha_{21}\right)+\right.$$
$$\left.+2\cdot\left(\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}\right)\right]\cdot e^{(-1-i)\rho}+$$
$$+(1+i)\rho\cdot\left[\left(\alpha_1\alpha_{21}+\beta_1\beta_{21}\right)+(1-i)\rho\cdot\left(\alpha_1\beta_{21}+\beta_1\alpha_{21}\right)+\right.$$
$$\left.+2\cdot\left(\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}\right)\right]\cdot e^{(-1+i)\rho}+$$
$$+(1+i)\rho\cdot\left[\left(\alpha_1\alpha_{21}+\beta_1\beta_{21}\right)+(1-i)\rho\cdot\left(\alpha_1\beta_{21}+\beta_1\alpha_{21}\right)-\right.$$
$$\left.-2\cdot\left(\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}\right)\right]\cdot e^{(1-i)\rho}+$$
$$+(1-i)\rho\cdot\left[\left(\alpha_1\alpha_{21}+\beta_1\beta_{21}\right)+(1+i)\rho\cdot\left(\alpha_1\beta_{21}+\beta_1\alpha_{21}\right)-\right.$$
$$\left.-2\cdot\left(\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}\right)\right]\cdot e^{(1+i)\rho}=0. \qquad (4)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Краевая задача (1), (2) имеет две серии собственных значений

$$\lambda_{k1}=-(k\pi)^2\left[1+\frac{\ln_0\xi_1}{2k\pi i}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],$$
$$\lambda_{k2}=(k\pi)^2\left[1+\frac{\ln_0\xi_2}{2k\pi i}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],$$

где $\xi_1=-\dfrac{\theta_1}{\theta_2}$, $\xi_2=-\dfrac{\theta_2}{\theta_1}$,

$$\theta_1=\alpha_1\alpha_{21}+\beta_1\beta_{21}+i\cdot\left(\alpha_1\beta_{21}+\beta_1\alpha_{21}\right),$$
$$\theta_2=i\cdot\left(\alpha_1\alpha_{21}+\beta_1\beta_{21}\right)+\alpha_1\beta_{21}+\beta_1\alpha_{21},$$

$k=N, N+1, \ldots$

Все собственные значения, начиная с некоторого, простые.

Доказательство. Комплексное число ρ будем считать достаточно большим по модулю. Обе части уравнения (4) разделим на величину $(1-i)\rho$. Тогда уравнения (4) примет вид

$$\left[\alpha_1\alpha_{21}+\beta_1\beta_{21}+i\cdot\left(\alpha_1\beta_{21}+\beta_1\alpha_{21}\right)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\times$$
$$\times e^{(-1-i)\rho}+$$
$$+\left[i\cdot\left(\alpha_1\alpha_{21}+\beta_1\beta_{21}\right)+\alpha_1\beta_{21}+\beta_1\alpha_{21}+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\times$$
$$\times e^{(-1+i)\rho}+$$
$$+\left[i\cdot\left(\alpha_1\alpha_{21}+\beta_1\beta_{21}\right)+\alpha_1\beta_{21}+\beta_1\alpha_{21}+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\times$$
$$\times e^{(1-i)\rho}+$$
$$+\left[\alpha_1\alpha_{21}+\beta_1\beta_{21}+i\cdot\left(\alpha_1\beta_{21}+\beta_1\alpha_{21}\right)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\times$$
$$\times e^{(1+i)\rho}=0.$$

Если обозначить

$$\theta_1=\alpha_1\alpha_{21}+\beta_1\beta_{21}+i\cdot\left(\alpha_1\beta_{21}+\beta_1\alpha_{21}\right),$$
$$\theta_2=i\cdot\left(\alpha_1\alpha_{21}+\beta_1\beta_{21}\right)+\alpha_1\beta_{21}+\beta_1\alpha_{21},$$

то будем иметь уравнения

$$\left[\theta_1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(-1-i)\rho}+\left[\theta_2+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(-1+i)\rho}+$$
$$+\left[\theta_2+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1-i)\rho}+\left[\theta_1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1+i)\rho}=0. \qquad (5)$$

В дальнейших выкладках важную роль играет асимптотическое поведение каждой из функций

$$\varphi_1(\rho)=e^{(-1-i)\rho}\,,\quad \varphi_2(\rho)=e^{(-1+i)\rho}\,,$$

$$\varphi_3(\rho)=e^{(1-i)\rho}\,,\quad \varphi_4(\rho)=e^{(1+i)\rho}\,,$$

которые связаны между собой соотношениями $\varphi_1(\rho)=\varphi_4(-\rho)$, $\varphi_2(\rho)=\varphi_3(-\rho)$. Обозначая $\rho=\rho_1+i\rho_2$, выпишем значения вещественных частей некоторых чисел:

1) $\operatorname{Re}(-1-i)\rho=-\rho_1+\rho_2$,

2) $\operatorname{Re}(-1+i)\rho=-\rho_1-\rho_2$,

3) $\operatorname{Re}(1-i)\rho=\rho_1+\rho_2$,

4) $\operatorname{Re}(1+i)\rho=\rho_1-\rho_2$.

Эти четыре величины определяют асимптотическое поведение функции $\varphi_i(\rho)$, $i=\overline{1,4}$, которые можно записать в следующем виде:

1) $|\varphi_1(\rho)|\sim e^{-\rho_1+\rho_2}$, 2) $|\varphi_2(\rho)|\sim e^{-\rho_1-\rho_2}$,

3) $|\varphi_3(\rho)|\sim e^{\rho_1+\rho_2}$, 4) $|\varphi_4(\rho)|\sim e^{\rho_1-\rho_2}$.

В случае $\rho_1=\pm\rho_2$, т.е. когда число ρ находится на биссектрисе координатного угла комплексной ρ-плоскости, только одна из величин $|\varphi_i(\rho)|$ экспоненциально растет, одна экспоненциально убывает, а оставшиеся две оказываются ограниченными при $|\rho|\to\infty$, так что при больших значениях $|\rho|$ уравнение (5) не имеет решения. Поэтому мы рассмотрим области, находящиеся между биссектрисами координатных углов.

1-случай. Пусть $\rho_2\ge 0$ и $\rho_2>|\rho_1|$, т.е. ρ находится в верхней полуплоскости, между биссектрисами I и II координатных углов комплексной ρ-плоскости. Тогда $|\varphi_1(\rho)|$ и $|\varphi_3(\rho)|$ экспоненциально стремятся к бесконечности, а $|\varphi_2(\rho)|$ и $|\varphi_4(\rho)|$ экспоненциально убывают при $|\rho|\to\infty$. При этом из уравнения (5) получим

$$\left[\theta_1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(-1-i)\rho}+\left[\theta_2+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1-i)\rho}=0\,. \tag{6}$$

Преобразуем это уравнение

$$e^{-2\rho}=-\frac{\theta_2+O\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\theta_1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)}=$$

$$=-\frac{\theta_2}{\theta_1}\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]=\xi_2\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

При выполнении наших требований на коэффициенты краевых условий (2) числа θ_0 и θ_1 отличны от нуля.

Из последнего уравнения находим

$$\rho=-\frac{1}{2}\left[\ln_0\xi_2+2k\pi i+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{7}$$

Если введем обозначение

$$\rho_k=-\frac{1}{2}\left[\ln_0\xi_2+2k\pi i\right], \tag{8}$$

где $\ln_0\xi$ – какое-нибудь фиксированное значение натурального логарифма от комплексного числа ξ, то соотношение (8) принимает вид

$$\rho=\rho_k+O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Около каждой точки ρ_k опишем окружности γ_k одного и того же радиуса. Для отрицательных значений числа k эти окружности будут целиком лежать в рассматриваемой области. Далее, поступая точно так же, как и в работе М. А. Наймарка[1], на основании теоремы Руше приходим к утверждению теоремы.

2-случай. Пусть $\rho_2\le 0$ и $|\rho_2|>|\rho_1|$. Это значит, что число ρ находится в нижней полуплоскости, между биссектрисами III и IV координатных углов комплексной ρ-плоскости. В этой области функции $|\varphi_1(\rho)|$ и $|\varphi_3(\rho)|$ экспоненциально убывают, а $|\varphi_2(\rho)|$ и $|\varphi_4(\rho)|$ экспоненциально растут при $|\rho|\to\infty$. Поэтому уравнение

[1]*Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 528 с.

(5) примет следующий асимптотический вид:

$$\left[\theta_2+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(-1+i)\rho}+\left[\theta_1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1+i)\rho}=0. \quad (9)$$

После несложных преобразований уравнения (9) получим уравнение

$$e^{-2\rho}=-\frac{\theta_1}{\theta_2}\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]=\xi_1\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

решениями которого будут соотношения вида (7). Далее, дословно повторяя выкладки предыдущего случая, получаем утверждение теоремы.

3-случай. Пусть $\rho_1\geq0$ и $\rho_1|>|\rho_2|$. В рассматриваемом случае число ρ находится в правой полуплоскости, между биссектрисами I и IV координатных углов комплексной ρ-плоскости. При этом функции $|\varphi_1(\rho)|$ и $|\varphi_2(\rho)|$ экспоненциально стремятся к нулю, а функции $|\varphi_3(\rho)|$ и $|\varphi_4(\rho)|$ экспоненциально растут при $|\rho|\to\infty$. В связи с этим уравнение (5) сводится к уравнению

$$\left[\theta_2+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1-i)\rho}+\left[\theta_1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1+i)\rho}=0.$$

Это уравнение легко приводится к виду

$$e^{-2i\rho}=-\frac{\theta_1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\theta_2+O\left(\frac{1}{\rho}\right)}=-\frac{\theta_1}{\theta_2}\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]=$$

$$=\xi_1\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Дальнейшие выкладки совершенно аналогичны выкладкам, приведенным в 1-случае.

4-случай. Осталось рассмотреть последний случай, когда $\rho_1\leq0$ и $|\rho_1|>|\rho_2|$, т.е. тот случай, когда ρ находится в левой полуплоскости, между биссектрисами II и III координатных углов. В этой области функции $|\varphi_3(\rho)|$ и $|\varphi_4(\rho)|$ экспоненциально стремятся к нулю, в то время как $|\varphi_1(\rho)|$ и $|\varphi_2(\rho)|$ экспоненциально растут к бесконечности при $|\rho|\to\infty$. На основании этого уравнение (5) приводится к виду

$$\left[\theta_1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(-1-i)\rho}+\left[\theta_2+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(-1+i)\rho}=0.$$

Далее, поступая как и выше, приходим к утверждению теоремы.

Таким образом, при любом расположении числа ρ в комплексной ρ-плоскости мы получили утверждение теоремы. Теорема доказана.

Изложенная методика получения асимптотики собственных значений позволяет выписать асимптотику собственных значений и при других значениях коэффициентов краевых условий (2).

Пусть в соотношениях (2) $\alpha_1=\beta_1=0$. Тогда краевые условия (2) будут сведены к виду

$$u(-1)=0,\quad u(1)=0.$$

Так как в краевых условиях (2) $\alpha_1=0$, $\beta_1=0$, $\alpha_{21}=0$, $\beta_{11}=0$, $\alpha_{11}=0$, $\beta_{21}=0$, то уравнение (4) запишется в виде

$$e^{(-1-i)\rho}+e^{(-1+i)\rho}-e^{(1-i)\rho}-e^{(1+i)\rho}=0.$$

Применение изложенных выкладок приводит к следующим двум сериям простых собственных значений:

$$\lambda_{k1}=-(k\pi)^2,\ \lambda_{k2}=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2.$$

В работе использован метод Биркгофа, изложенный в монографии М. А. Наймарка[2].

Резюме

Мақалада $u''(x)+\lambda u(-x)=0$ теңдеуінің кейбір шеттік есептерінің меншікті мәндерінің асимптотикалық формулалары келтірілген.

Summary

In this article are given asymptotic formulas of eigen value of boundary-value problems for differential equations in second order with divergent argument, in that case when only one standard condition consist of derivative importance, and the second don't consist of them.

УДК 517.927.25

ЮКГУ им. М. Ауезова,
г.Шымкент

Поступила 10.10.06г.

[2]Там же.