М. Д. ШИНИБАЕВ, С. А. ЖАПБАРОВ, Н. М. УТЕНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ПРОБНОГО ТЕЛА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ СЖАТОГО СФЕРОИДА И ВНЕШНЕГО ТЕЛА ВТОРЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

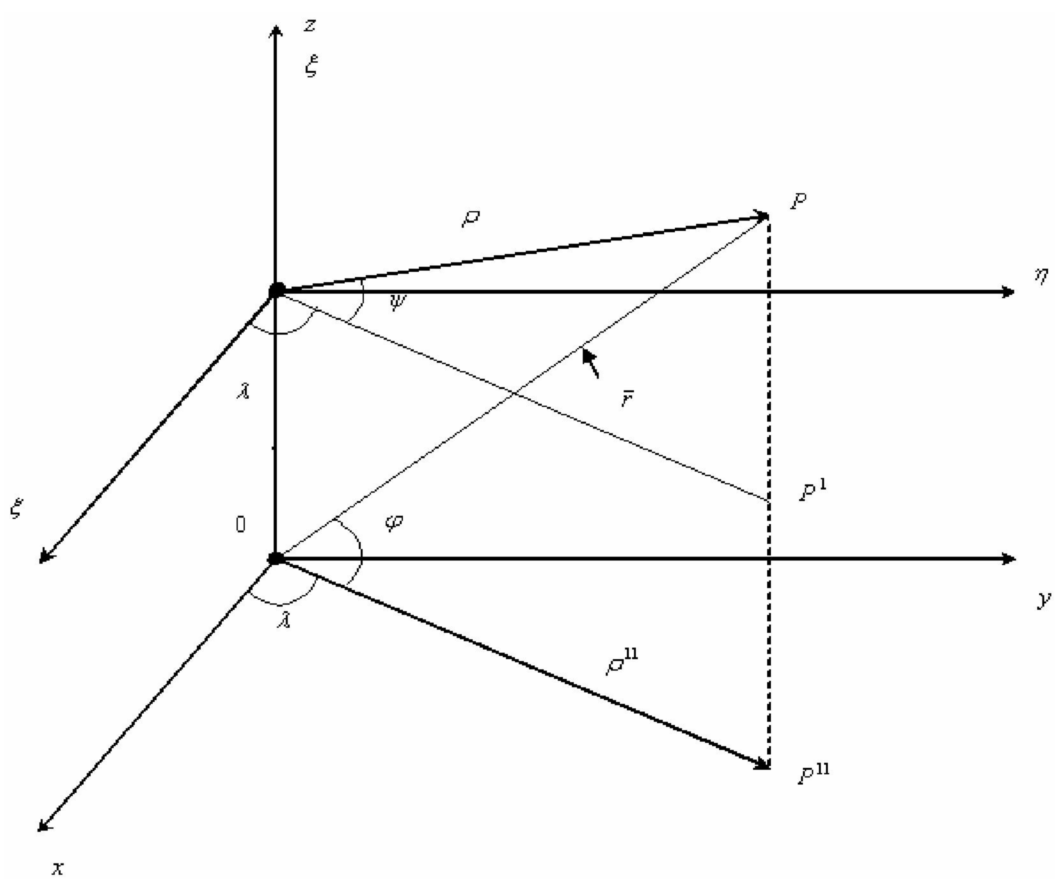
Дифференциальные уравнения движения пробного тела в поле тяготения сжатого сфероида и внешнего тела в сферической системе координат В. Г. Демина имеют вид [1]:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\dot{\rho}}{dt} - \rho\dot{\psi}^2 - \rho\dot{\lambda}^2 = \cos^2\psi \quad -\frac{\mu}{\rho^2} - \frac{2fMz_c}{\rho^3}\sin\psi + \nu\rho - 3\nu\rho\sin^2\psi,\\
&\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\lambda}\cos^2\psi\right) = 0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\psi}\right) + \rho^2\dot{\lambda}^2\cos\psi \sin\psi \quad \frac{fMz_c}{\rho^2}\cos\psi - 3\nu\rho^2\sin\psi\cos\psi,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где M – масса сжатого сфероида; m – произведение постоянной тяготения на сумму масс центрального и пробного тела; n – постоянная Хилла; f – постоянная тяготения; Z_c = 209,9 км – аппликата шаровой точки; r, y, l – сферические координаты В. Г. Демина [2]

Системы координат связаны следующими выражениями:

$$x = \xi = \rho\cos\psi cjs\lambda, y = \eta = \rho\cos\psi\sin\lambda, Z - Z_c = \zeta = \rho\sin\psi .$$



Дифференциальные уравнения (1) допускают интеграл энергии

$$F_1 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\psi}^2 + \rho^2\dot{\lambda}^2\cos^2\psi - \frac{2\mu}{\rho} - \frac{2fMz_c}{\rho^2}\sin\psi - \nu\rho^2 + 3\nu\rho^2\sin^2\psi, \tag{2}$$

и интеграл площадей

$$F_2 = \dot{\lambda}^2\rho^2\cos^2\psi. \tag{3}$$

Условия существования круговых движений

$$\rho = \rho_0, \qquad \psi = \psi_0, \qquad \dot{\lambda} = \omega \tag{4}$$

имеют вид

$$\mu = \rho_0^3\left[\left(-9\nu - 3\omega^2\right)\sin^2\psi_0 + \nu + \omega^2\right], \qquad fMz_c = \rho_0^4\left(3\nu + \omega^2\right)\sin\psi_0. \tag{5}$$

Принимая (4) за невозмущенное движение, исследуем его устойчивость, используя второй метод Ляпунова.

Для построения функции Ляпунова используем метод связки первых интегралов, предложенный Н. Г. Четаевым:

$$V = F_1 - F_1(0) + \lambda\left[F_2 - F_2(0)\right] + \chi\left[F_2^2 - F_2^2(0)\right], \tag{6}$$

где $F_1(0)$ и $F_2(0)$ – значения F_1 и F_2 при $\rho = \rho_0$, $\psi = \psi_0$, $\dot{\lambda} = \omega$.

Введем обозначения:

$$\rho = \rho_0 + x_1, \quad \dot{\rho} = x_2, \quad \psi = \psi_0 + x_3, \quad \dot{\psi} = x_4, \quad \dot{\lambda} = \omega + x_5. \tag{7}$$

Подставим (7) в (6):

$$\begin{aligned} V = &\Bigg[x_2^2 + (\rho_0 + x_1)^2 x_4^2 + (\rho_0 + x_1)^2(\omega + x_5)^2\cos^2(\psi_0 + x_3) - \frac{2\mu}{\rho_0 + x_1} - 2fMz_c\frac{\sin(\psi_0 + x_3)}{(\rho_0 + x_1)^2} - \\ &-\nu(\rho_0 + x_1)^2 + 3\nu(\rho_0 + x_1)^2\sin^2(\psi_0 + x_3) - \frac{2\mu}{\rho_0} + 2fMz_c\frac{\sin\psi_0}{\rho_0^2} + \nu\rho_0^2 - 3\nu\rho_0^2\sin^2\psi_0\Bigg] + \\ &+\lambda\left[(\rho_0 + x_1)^2\cos^2(\psi_0 + x_3)(\omega + x_5) - \rho_0^2\omega\cos^2\psi_0\right] + \\ &\chi\left[(\rho_0 + x_1)^4\cos^4(\psi_0 + x_3)(\omega + x_5)^2 - \rho_0^4\omega^2\cos^4\psi_0\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Разложим члены в правой части (8) в ряд Маклорена по степеням x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 в окрестности их нулевых значений и сохраним члены разложений в ряд вплоть до величин второго порядка относительно возмущений:

$$x_2^2 = x_2^2,$$

$$(\rho_0 + x_1)^2 x_4^2 = \rho_0^2 x_4^2 + \ldots,$$

$$\begin{aligned} &(\rho_0 + x_1)^2(\omega + x_5)^2\cos^2(\psi_0 + x_3) \quad \rho_0^2\omega^2\cos^2\psi_0 - \rho_0^2\omega^2 x_3\sin 2\psi_0 - \rho_0^2\omega^2 x_3^2\cos 2\psi_0 + \\ &+2\omega \quad x_5\rho_0^2\cos^2\psi_0 - 2\omega \quad x_5\rho_0^2 x_3\sin 2\psi_0 + \rho_0^2 x_5^2\cos^2\psi_0 + 2x_1\rho_0\omega^2\cos^2\psi_0 - \\ &-2x_1\rho_0\omega^2 x_3\sin 2\psi_0 + 4x_1\rho_0\omega x_5\cos^2\psi_0 + x_1^2\omega^2\cos^2\psi_0 + \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{2\mu}{\rho_0 + x_1} \quad 18\nu\rho_0^2\sin^2\psi_0 - 18\nu\rho_0 x_1\sin^2\psi_0 + 18\nu\sin^2\psi_0 + 6\rho_0^2\omega^2\sin^2\psi_0 - \\ &-6\omega^2\rho_0 x_1\sin^2\psi_0 + 6\omega^2 x_1^2\sin^2\psi_0 - 2\nu\rho_0^2 + 2\nu\rho_0 x_1 - 2\nu x_1^2 - 2\omega^2\rho_0^2 + 2\omega^2\rho_0 x_1 - 2\omega^2 x_1^2 + \ldots, \end{aligned}$$

$$-\frac{2fMz_c}{(\rho_0+x_1)^2}\sin\left(\psi_0+x_3\right) \quad -6\nu\rho_0^2\sin^2\psi_0-6\nu\rho_0^2\sin\psi_0\cos\psi_0\cdot x_3+3x_3^2\nu\rho_0^2\sin^2\psi_0+$$
$$+12\nu\rho_0 x_1\sin^2\psi_0+12x_3\nu\rho_0 x_1\sin\psi_0\cos\psi_0-18\nu x_1^2\sin^2\psi_0-2\omega^2\rho_0^2\sin^2\psi_0-2x_3\omega^2\rho_0^2\sin\psi_0\cos\psi_0+$$
$$+\omega^2\rho_0^2x_3^2\sin^2\psi_0+4\omega^2\rho_0x_1\sin^2\psi_0+4x_3\omega^2\rho_0x_1\sin\psi_0\cos\psi_0-6\omega^2x_1^2\sin^2\psi_0+\ldots,$$

$$3\nu\left(\rho_0+x_1\right)^2\sin^2\left(\psi_0+x_3\right) \quad 3\nu\rho_0^2\sin^2\psi_0+3\nu\rho_0^2x_3\sin 2\psi_0+$$
$$+3\nu\rho_0^2x_3^2\cos 2\psi_0+6\rho_0x_1\nu\sin^2\psi_0+6\rho_0\nu x_1x_3\sin 2\psi_0+3\nu x_1^2\sin^2\psi_0+\ldots,$$

$$\lambda\left[\left(\rho_0+x_1\right)^2\left(\omega+x_5\right)\cos^2\left(\psi_0+x_3\right)\right]=$$
$$=\left[\rho_0^2\omega\cos^2\psi_0-\rho_0^2\omega \quad x_3\sin 2\psi_0-\rho_0^2\omega \quad x_3^2\cos 2\psi_0+\rho_0^2x_5\cos^2\psi_0-\rho_0^2x_3x_5\sin 2\psi_0+\right.$$
$$\left.+2\rho_0\omega \quad x_1\cos^2\psi_0-2\rho_0\omega \quad x_1x_3\sin 2\psi_0+2\rho_0x_1x_5\cos^2\psi_0+x_1^2\omega\cos^2\psi_0\right]\lambda+\ldots,$$

$$\chi\left[\left(\rho_0+x_1\right)^4\cos^4\left(\psi_0+x_3\right)\left(\omega+x_5\right)^2\right] \quad x\left[\rho_0^4\omega^2\cos^4\psi_0+\rho_0^4\omega^2x_3^2\sin^2 2\psi_0+\rho_0^4x_5^2\cos^4\psi_0+\right.$$
$$+4\rho_0^2x_1^2\omega^2\cos^4\psi_0-2\rho_0^4\omega^2x_3\cos^2\psi_0\sin 2\psi_0-2\rho_0^4\omega^2x_3^2\cos^2\psi_0\cos 2\psi_0+2\rho_0^4x_5\omega\cos^4\psi_0-$$
$$-2\rho_0^4\omega \quad x_3x_5\sin 2\psi_0\cos^2\psi_0+4\rho_0^3\omega^2x_1\cos^4\psi_0-4\rho_0^2x_1\omega^2x_3\cos^2\psi_0\sin 2\psi_0+4\rho_0^3x_1x_5\omega\cos^4\psi_0+$$
$$\left.+2\rho_0^2\omega^2x_1^2\cos^4\psi_0-2\rho_0^4\omega \quad x_3x_5\cos^2\psi_0\sin 2\psi_0-4\rho_0^3\omega \quad x_1x_3\sin 2\psi_0\cos^2\psi_0+4\rho_0^3 \quad x_1x_5\omega\cos^2\psi_0\right]+\ldots,$$

$$\frac{2fMz_c}{\rho_0}\sin\psi_0=6\nu\rho_0^2\sin^2\psi_0+2\omega^2\rho_0^2\sin^2\psi_0.$$

В этих разложениях в степенной ряд учтены условия (5).

Подставим эти разложения в (8) и приравняем коэффициенты при первой степени возмущений, тогда найдем l:

$$\lambda=-2\omega-\chi\rho_0^2\omega\cos^2\psi_0. \tag{9}$$

С учетом (9) функция Ляпунова имеет вид:

$$V=[-2\omega^2-3\nu\cos^2\psi_0-\omega^2\cos^2\psi_0+4x\rho_0^2\omega^2\cos^4\psi_0]x_1^2+x_2^2+[(3\nu+\omega^2+4x\rho_0^2\omega^2\sin^2\psi_0)\times$$
$$\times\rho_0^2\cos^2\psi_0]x_3^2+\rho_0^2x_4^2+[(1+x\rho_0^2\cos^2\psi_0)\rho_0^2\cos^2\psi_0]x_5^2+2[2(3\nu+\omega^2-$$
$$-x\rho_0^2\omega^2\cos^2\psi_0)\rho_0\sin 2\psi_0]x_1x_3+2[(-x\rho_0^4\omega\sin 2\psi_0\cos^2\psi_0)]x_3x_5+(4x\rho_0^3\omega\cos^4\psi_0)x_0x_5. \tag{10}$$

Оставляя в выражении (10) величины вплоть до $O\left(\dfrac{z_c^2}{\rho_0^2}\right)$, имеем с учетом (5)

$$V=\left[-3\left(\omega^2+\nu\right)+\frac{z_c^2}{\rho_0^2}\left(3\nu+\omega^2\right)+4x\omega^2\left(\rho_0^2-2z_c^2\right)\right]x_1^2+x_2^2+\rho_0^2x_4^2+[3\nu(\rho_0^2-z_c^2)+\omega^2(\rho_0^2-z_c^2)+$$
$$+4\chi\rho_0^2\omega^2z_c^2]x_3^2+\left[\left(\rho_0^2-z_c^2\right)+\rho_0^2\left(\rho_0^2-2z_c^2\right)\right]x_5^2+\left[\left(\omega^2+3\nu\right)+x\omega^2\left(z_c^2-\rho_0^2\right)\right]8z_cx_3x_1$$
$$+4\left[\chi\rho_0\omega z_c\left(z_c^2-\rho_0^2\right)\right]x_3x_5+4\left[\chi\rho_0\omega\left(\rho_0^2-2z_c^2\right)\right]x_1x_5+\cdots$$

При любом $c > 0$ имеет место

$$\left[-3\left(\omega^2+v\right)+\frac{z_c^2}{\rho_0^2}\left(3v+\omega^3\right)+4\chi\omega^2\left(\rho_0^2-2z_c^2\right)\right]>0,\quad \left[3v\left(\rho_0^2-z_c^2\right)+\omega^2\left(\rho_0^2-z_c^2\right)+4\chi\rho_0^2\omega^2 z_c^2\right]>0,$$

$$\left[\left(\rho_0^2-z_c^2\right)+\chi\rho_0^2\left(\rho_0^2-2z_c^2\right)\right]>0,\qquad \rho_0^2>0,\qquad 8z_c\left[\left(\omega^2+3v\right)+\chi\omega^2\left(z_c^2-\rho_0^2\right)\right]<0,$$

$$4\left[\chi\rho_0\omega z_c\left(z_c^2-\rho_0^2\right)\right]<0,\qquad 4\left[\chi\rho_0\omega\left(\rho_0^2-2z_c^2\right)\right]>0.$$

Используя эти неравенства, разобьем функцию Ляпунова на 3 части:

$$V = V_1 + V_2 + V_3,$$

где

$$V_1=\frac{1}{2}\left[-3\left(\omega^2+v\right)+\frac{z_c^2}{\rho_0^2}\left(3v+\omega^2\right)+4\chi\omega^2\left(\rho_0^2-2z_c^2\right)\right]z_1^2+x_2^2+$$
$$+\rho_0^2x_4^2+\frac{1}{2}\left[\left(\rho_0^2-z_c^2\right)+\chi\rho_0^2\left(\rho_0^2-2z_c^2\right)\right]x_5^2+4\left[\chi\rho_0\omega\left(\rho_0^2-2x_c^2\right)\right]x_1x_5,$$

$$V_2=\frac{1}{2}\left[-3\left(\omega^2+v\right)+\frac{z_c^2}{\rho_0^2}\left(3v+\omega^2\right)+4\chi\omega^2\left(\rho_0^2-2z_c^2\right)\right]x_1^2+$$
$$+2\left\{4z_c\left[\left(\omega^2+3v\right)+x\omega^2\left(z_c^2-\rho_0^2\right)\right]\right\}x_1x_3+\frac{1}{2}\left[\left(\rho_0^2-z_c^2\right)+\omega^2\left(\rho_0^2-z_c^2\right)+4\chi\rho_0^2\omega^2z_c^2\right]x_3^2,$$

$$V_3=\frac{1}{2}\left[3v\left(\rho_0^2-z_c^2\right)+\omega^2\left(\rho_0^2-z_c^2\right)+4\chi\rho_0^2\omega^2z_c^2x_1^2\right]x_3^2+$$
$$+2\left[2\chi\rho_0\omega z_0\left(z_c^2-\rho_0^2\right)\right]x_3x_5+\frac{1}{2}\left[\left(\rho_0^2-z_c^2\right)+\chi\rho_0^2\left(\rho_0^2-2z_c^2\right)\right]x_5^2.$$

Здесь V_1 определенно положительна, так как $x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0,\ x_4>0,\ x_5>0.$

Используя критерий Сильвестра, исследуем V_2:

$$\Delta_1=\frac{1}{2}\left[-3\left(\omega^2+v\right)+\frac{z_c^2}{\rho_0^2}\left(3v+\omega^2\right)+4\chi\omega^2\left(\rho_0^2-2z_c^2\right)\right]>0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\Delta_1 & 4z_c\left[\left(\omega^2+3v\right)+\chi\omega^2\left(z_c^2-\rho_0^2\right)\right]\\ 4z_c\left[\left(\omega^2+3v\right)+\chi\omega^2\left(z_c^2-\rho_0^2\right)\right] & \frac{1}{2}\left[\left(3v+\omega^2\right)\left(\rho_0^2-x_c^2\right)+4\chi\rho_0^2\omega^2z_c^2\right]\end{vmatrix}>0$$

или

$$\Delta_2\quad\frac{1}{4}\left[=3\left(\omega^2+3v\right)+\frac{z_c^2}{\rho_0^2}\left(3v+\omega^2\right)+4\chi\omega^2\left(\rho_0^2-2z_c^2\right)\right]\times$$
$$\times\left[\left(3v+\omega^2\right)\left(\rho_0^2-z_c^2\right)+4\chi\rho_0^2\omega^2z_c^2\right]-16z_c^2\left[\left(\omega^2+3v\right)+\chi\omega^2\left(z_c^2-\rho_0^2\right)\right]^2>0.$$

После надлежащих преобразований

$$\Delta_2=\frac{\omega^2\rho_0^4}{4}\left\{\chi\left[12\nu+4\omega^2+\left(104\omega^2+336\nu\right)\frac{z_c^2}{\rho_0^2}+\chi\omega^2 z_c^2\left(\frac{z_c^2}{\rho_0^2}-48\right)\right]\right\}>0,$$

$$\chi_1>0,\ \ \chi_2>\frac{12\nu+4\omega^2+\left(104\omega^2+336\nu\right)\dfrac{z_c^2}{\rho_0^2}}{\omega^2 z_c^2\left(48-\dfrac{z_c^2}{\rho_0^2}\right)}>0.$$

Таким образом, при $c > 0$, V_2 определенно положительна.

Исследуя V_3:

$$\Delta_1=\frac{1}{2}\left[3\nu\left(\rho_0^2-z_c^2\right)+\omega^2\left(\rho_0^2-z_c^2\right)+4\chi\rho_0^2\omega^2 z_c^2\right]>0,$$

при любом $c > 0$.

Выпишем D_2 для V_3:

$$\Delta_2 \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\left[\left(3\nu+w^2\right)\left(\rho_0^2-z_c^2\right)+4\chi\rho_0^2\omega^2 z_c^2\right] & 2\chi\rho_0\omega z_c\left(z_c^2-\rho_0^2\right) \\ 2\chi\rho_0\omega z_c\left(z_c^2-\rho_0^2\right) & \frac{1}{2}\left[\left(\rho_0^2-z_c^2\right)+\chi\rho_0^2\left(\rho_0^2-2z_c^2\right)\right] \end{vmatrix} = >0.$$

Раскрывая определитель, будем иметь

$$\Delta_2=\frac{\rho_0^6}{4}\left[\left(-\frac{16\omega z_c^6}{\rho_0^4}\right)\chi-\left(3\nu+\omega^2+\frac{\omega^2 z_c^2}{\rho_0^2}\right)\chi+\omega^2\right]>0\,.$$

Здесь $\dfrac{\rho_0^6}{4}>0$, остается решить второе неравенство

$$\left(-\frac{16\omega z_c^6}{\rho_0^4}\right)x^2-\left(3\nu+\omega^2+\frac{\omega^2 z_c^2}{\rho_0^2}\right)x+\omega^2>0\,.$$

Решая это неравенство, имеем

$$\chi>\frac{\rho_0}{4z_c^2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{3\rho_0^2\nu}{\omega^2 z_c^2}+\frac{3\rho_0^2}{z_c^2}+1\right)}+\frac{\rho_0^2}{32z_c^4}\left(\frac{3\rho_0^2\nu}{\omega^2 z_c^2}+\frac{\rho_0^2}{z_c^2}+1\right)>0\,.$$

Исходя из изложенного при $c > 0$ каждая из частей функции Ляпунова V_1, V_2, V_3 определенно положительна, следовательно, будет определенно положительной и функция Ляпунова. С другой стороны, функция Ляпунова является интегралом дифференциальных уравнений движения пассивно гравитирующего тела, т.е.

$$V=F_1-F_1(0)+\lambda\left[F_2-F_2(0)\right]+\chi\left[F_2^2-F_2^2(0)\right]=\text{const},$$

следовательно, $\dot{V}\equiv 0$, т.е. выполнены все условия теоремы Ляпунова об устойчивости невозмущенного движения.

Таким образазом, невозмущенное движение при $c > 0$ устойчиво относительно $\rho,\dot{\rho},\psi,\dot{\psi},\dot{\lambda}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шинибаев М.Д.* Динамика поступательного движения пассивно гравитирующих тел постоянной и переменной масс в центральном поле тяготения: Автореф. ... дис. д. ф.-м. н. Бишкек, 2002.

2. *Демин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М.: Наука, 1968. 352 с.

Резюме

Сығылған сфероид пен сыртқы дененің өрісіндегі қозғалыстағы пассив гравитациялық дененің шеңберлік қозғалыстарының орнықтылығы Ляпуновтың екінші әдісімен зерттелген. Шеңберлік қозғалыстардың орнықты болу шарттары анықталған.

Summary

The stability of circular movement of tested body in the sphere of gravity of compressed spheroid and exterior body of the second method of Lyapunov is researched in this article. The conditions of existence and the stability of circular movement of testing body not in the central field of gravity is found.

УДК 531.1

Поступила 12.10.06г.