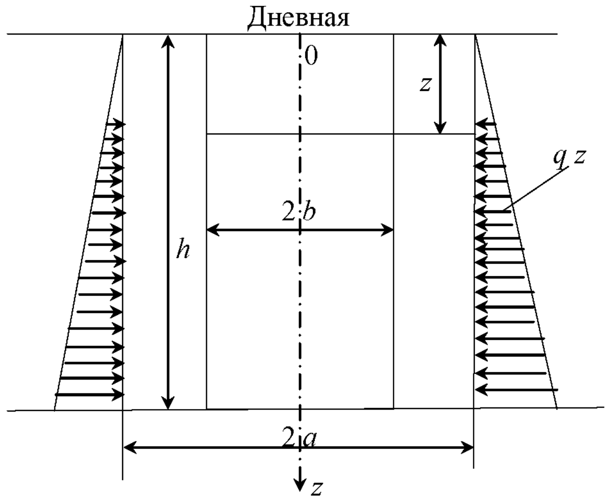
Е. АРИНОВ

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ БЕЗ ПОДКРЕПЛЕНИЯ

Рассмотрим вертикальную горную выработку круговой цилиндрической формы глубиной h. Решение проводим в цилиндрической системе координат для случая меридиональной деформации. Начало координат поместим на оси цилиндрической выработки на дневной поверхности. При этом положения точек характеризуем цилиндрическими координатами: полярным радиусом r и координатой z, отсчитываемой от дневной поверхности вглубь, в выбранном положительном направлении (см. рис.).



Расчетная схема вертикальной круговой цилиндрической горной выработки, квершлага (сечение вертикальной плоскостью, проходящей через ось O_z выработки)

Введем вместо r, z безразмерные переменные x, ξ:

$$x = \frac{r}{a}, \quad \xi = \frac{z}{a}, \tag{1}$$

где a – наружный радиус цилиндра, за пределами которого не учитывается влияние концентрации напряжений, т. е. 5–6 радиусов выработки, как это принято в механике горных пород. На уровне глубины z на внешнюю границу $r = a$ цилиндра действует равномерное давление, равное γz, где γ – удельный вес материала среды, z – произвольная глубина. Для полого цилиндра длины h, т. е. глубины выработки с внутренним радиусом b – радиусом выработки:

$$\frac{b}{a} = x_1 \le x < 1,\ \ 0 \le \xi \le \frac{h}{a}. \quad (2)$$

Для рассматриваемой меридиональной деформации решение задачи может быть выражено через две гармонические функции Папковича–Нейбера b_0 и b_3*, т. е.:

$$\nabla^2 b_0 = 0,\ \ \nabla^2 b_3 = 0. \quad (3)$$

Здесь оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}. \quad (4)$$

Перемещения через функцию b_0, b_3 выражаются формулами:

$$u = a\left[-\frac{\partial b_0}{\partial x} + \xi\frac{\partial b_3}{\partial x}\right],$$

$$w = a\left[(3-4\nu)b_3 - \frac{\partial b_0}{\partial x} + \xi\frac{\partial b_3}{\partial x}\right], \quad (5)$$

а напряжения –

$$\sigma_r = 2G\left[2\nu\frac{\partial b_3}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial^2 b_0}{\partial x^2} + \xi\frac{\partial^2 b_3}{\partial x^2}\right)\right],$$

$$\sigma_z = 2G\left[2(1-\nu)\frac{\partial b_3}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial^2 b_0}{\partial x^2} + \xi\frac{\partial^2 b_3}{\partial x^2}\right)\right],$$

$$\sigma_\varphi = 2G\left[2\nu\frac{\partial b_3}{\partial \xi} - \frac{1}{x}\left(\frac{\partial b_0}{\partial x} + \xi\frac{\partial b_3}{\partial x}\right)\right],$$

$$\tau_{rz} = 2G\left[(1-2\nu)\frac{\partial b_3}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 b_0}{\partial x \partial \xi} + \xi\frac{\partial^2 b_3}{\partial x \partial \xi}\right)\right]. \quad (6)$$

Функции b_0, b_3 имеют вид:

$$b_0 = A\frac{1}{2}\left(2\xi^3 - 3\xi x^2\right) + B\xi\ln x,$$

$$b_3 = C\frac{1}{2}\left(2\xi^2 - x^2\right) + D\ln x, \quad (7)$$

где A, B, C, D – произвольные постоянные интегрирования. Итак, пользуясь выражениями (7), определим перемещения (5):

$$u = a\left[3A\xi x - B\frac{\xi}{x} - C\xi x + \frac{D\xi}{x}\right],$$

$$w = a\left\{-A\left(3\xi^2 - \frac{3}{2}x^2\right) - B\ln x + C\left[2\xi^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (3-4\nu)\frac{1}{2}\left(2\xi^2 - x^2\right)\right] + (3-4\nu)D\ln x\right\} \quad (8)$$

и компоненты напряжений –

$$\sigma_r = 2G\xi\left[3A + \frac{B}{x^2} + C(4\nu+1) + \frac{D}{x^2}\right],$$

$$\sigma_z = 2G\xi\left[-6A + 2C(1-2\nu)\right],$$

$$\sigma_\varphi = 2G\xi\left[3A - \frac{B}{x^2} + C(4\nu+1) - \frac{D}{x^2}\right], \quad (9)$$

$$\tau_{rz} = 2G\left[3Ax - \frac{B}{x} - C(1-2\nu)x + \frac{D(1-2\nu)}{x}\right].$$

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 1:\ \sigma_r = -\gamma a\xi,\ \tau_{rz} = 0, \\ &\text{при } x = x_1:\ \sigma_r = 0,\ \tau_{rz} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя выражения для напряжений из (9) в граничные условия (10), получаем систему алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных интегрирования A, B, C, D:

$$3A + B + C(4\nu+1) + D = -\frac{\gamma a}{2G},$$

$$3A - B - C(1-2\nu) + D(1-2\nu) = 0,$$

$$3A + \frac{B}{x_1^2} - C(4\nu+1) + \frac{D}{x_1^2} = 0, \quad (11)$$

$$3Ax_1 - \frac{B}{x_1} - C(1-2\nu)x_1 + \frac{D(1-2\nu)}{x_1} = 0.$$

Решив эту систему уравнений, найдем значения произвольных постоянных:

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ B = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ C = \frac{\Delta_3}{\Delta},\ \ D = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \quad (12)$$

где

$$\Delta = \left|a_{ij}\right|, \quad (13)$$

причем

$$a_{11} = 3,\ \ a_{12} = 1,\ \ a_{13} = 4\nu + 1,\ \ a_{14} = 1,$$

$$a_{21} = 3,\ a_{22} = -1,\ a_{23} = -(1-2\nu),\ a_{24} = 1-2\nu,$$

**Лурье А.И.* Теория упругости. М., 1970. 939 с.

$$a_{31}=3,\ a_{32}=\frac{1}{x_1^2},\ a_{33}=4\nu+1,\ a_{34}=\frac{1}{x_1^2},$$

$$a_{41}=3x_1,\ a_{42}=-\frac{1}{x_1},$$

$$a_{43}=-(1-2\nu)x_1,\ a_{44}=\frac{1-2\nu}{x_1}; \qquad (14)$$

$$\Delta_1=-\frac{\gamma a}{2G}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad (15)$$

$$\Delta_2=\frac{\gamma a}{2G}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad (16)$$

$$\Delta_3=-\frac{\gamma a}{2G}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad (17)$$

$$\Delta_4=\frac{\gamma a}{2G}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \qquad (18)$$

Таким образом, найдено решение сформулированной задачи.

Просчитаем концентрацию напряжений на поверхности вертикальной цилиндрической полости в упругой среде горных пород по формулам (9), (12)–(18) при следующих значениях входных данных: удельный вес материала горных пород $\gamma=2,7\frac{\text{Г}}{\text{см}^3}$; коэффициент Пуассона $\nu=0,3$; модуль Юнга $E=0,62\cdot10^5\frac{\text{кГ}}{\text{см}^3}$; a = 12 м; b = 2 м и глубина z = 50 м.

Расчеты проведены на компьютере. Их результаты приведены ниже:

$$\nu=0,3,\ \gamma=2,7\cdot10^{-3};\ E=0,62\cdot10^5;$$

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)};\ b=200;\ a_1=1200;\ x_1=\frac{b}{a_1}.$$

$$a_{11}=3,\ a_{12}=1,\ a_{13}=4\nu+1,\ a_{14}=1,$$

$$a_{21}=3,\ a_{22}=-1,\ a_{23}=-(1-2\nu),$$

$$a_{24}=1-2\nu,$$

$$a_{31}=3,\ a_{32}=\frac{1}{(x_1)^2},\ a_{33}=4\nu+1,\ a_{34}=\frac{1}{(x_1)^2},$$

$$a_{41}=3x_1,\ a_{42}=-\frac{1}{x_1},\ a_{43}=-(1-2\nu)x_1,$$

$$a_{44}=\frac{1-2\nu}{x_1}.$$

$$\Delta_1=-\frac{\gamma\cdot1200}{2G}\left|\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\right|,$$

$$\Delta_2=\frac{\gamma\cdot1200}{2G}\left|\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\right|,$$

$$\Delta_3=-\frac{\gamma\cdot1200}{2G}\left|\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}\right|,$$

$$\Delta_4=\frac{\gamma\cdot1200}{2G}\left|\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}\right|.$$

$$\Delta_1=-6,848\cdot1,\ \Delta_2=3,655\cdot10^{-3},$$

$$\Delta_3=-0,06,\ \Delta_4=5,775\cdot10^{-4}.$$

$$\det=2,181\cdot10^3.$$

$$\det=\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\right|,$$

$$A=\frac{\Delta_1}{\det},\ B=\frac{\Delta_2}{\det},\ C=\frac{\Delta_3}{\det},\ D=\frac{\Delta_4}{\det},$$

$$A=-3,141\cdot10^{-6},\ B=1,676\cdot10^{-6},$$

$$C=-2,748\cdot10^{-5},\ D=2,648\cdot10^{-7},\ \xi=\frac{z}{a_1},$$

$$\sigma_r=2G\xi\left[3A+\frac{B}{(x_1)^2}+C(4\nu+1)+\frac{D}{(x_1)^2}\right],$$

$$\sigma_z = 2G\xi\left[-6A + 2C(1-2\nu)\right],$$

$$\sigma_\varphi = 2G\xi\left[3A - \frac{B}{(x_1)^2} + C(4\nu+1) - \frac{D}{(x_1)^2}\right],$$

$$\tau_{rz} = 2G\left[3Ax_1 - \frac{B}{x_1} - C(1-2\nu)x_1 + \frac{D(1-2\nu)}{x_1}\right].$$

$$k = 1,\ z = k\cdot 5000,\ \nu = 0{,}3.$$

$$\sigma_r = 0,\ \sigma_z = -0{,}472,\ \sigma_\varphi = -27{,}771,\ \tau_{rz} = 0.$$

При ν =0,5; $\sigma_r = \sigma_z = \tau_{rz} = 0$, $\sigma_\varphi = -27{,}771\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$.

Напряжения согласно формулам (9) пропорциональны глубине.

Резюме

Мақалада цилиндр пішінді вертикаль қуыс тау-кен жынысының маңайындағы кернеулі қалпы зерттелген. Қуыс тау-кен жынысы тірелмеген жағдайы қарастырылған.

Summary

The article reveals tense condition around vertical mining pit in the form of a round cylinder. The mine without support has been considered.

УДК 539.3 + 528.22

Жезказганский университет *Поступила 4.03.07г.*