УДК 539.3; 550.348

Ш. М. АЙТАЛИЕВ, А. А. БАЙМУХАМЕТОВ, А. С. КИМ

ОБ ЭВОЛЮЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ ЛИТОСФЕРНЫХ ПЛИТ В УСЛОВИЯХ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Рассмотрена математическая модель вязкого разлома на границе литосферных плит в условиях поперечного сдвига. В приближении обобщенного плоского напряженного состояния поставленная начально-краевая задача приведена к уравнению Фредгольма второго рода изображениях. Численно-аналитическим методом получено решение уравнения в явном виде, определяющем уровень напряжений в разломной зоне и скорость асейсмического скольжения.

В результате взаимодействия литосферных плит происходит накопление деформаций на одних участках границы, релаксация напряжений на других участках и «криповые» движения на третьих [1]. Первая зона представляет собой поверхность жесткого сцепления, в ней накапливаются деформации и напряжения вплоть до образования магистрального разрыва. Вторая зона, обусловленная, наличием жидкой фазы [2–6], характеризуется повышенной ползучестью пограничного слоя и релаксацией напряжений. В третьей зоне, расположенной на удалении от зоны зацепа, средние напряжения совпадают с фоновыми.

В приближении обобщенного плоского напряженного состояния представим два протяженных блока в виде двух пластин, разделенных сдвиговой плоской границей, что соответствует случаю, когда горизонтальные размеры блоков много больше толщины. Пластины представим в виде двух полуплоскостей с прямолинейной линией контакта, на которой расположены зоны зацепа, релаксации напряжений, криповых движений. На бесконечности полуплоскости подвержены действию сдвигающих напряжений $\sigma_{yx}^{\infty} = q$, $\sigma_{x}^{\infty} = 0$, $\sigma_{y}^{\infty} = 0$, создающих в среде фоновое напряжение.

Соответствующей суперпозицией напряжения на бесконечности приведем к напряжениям на разломе, а рассматриваемую задачу к краевой, граничные условия для которой принимают вид

$$\sigma_{x}^{\infty} = 0,\ \sigma_{y}^{\infty} = 0,\ \tau_{yx}^{\infty} = 0. \tag{1}$$

Условия на контактной поверхности запишутся в виде

$$a = 0 \text{, при } y = 0,\ |x| < l, \tag{2}$$

$$\tau^{\pm}_{yx} = \eta \frac{\partial a}{\partial t} - q,\ a(x,0) = a_0(x),\ a_0(\pm l) = 0 \text{, при } y = 0,\ l < |x| < L \tag{3}$$

$$\tau^{\pm}_{yx} = 0 \text{, при } y = 0,\ |x| > L. \tag{4}$$

Здесь a – взаимная подвижка берегов разлома, η – эффективный модуль вязкости, l – размер зоны зацепа, L – размер вязкой зоны.

Компоненты напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} и смещения u, v выражаются через две аналитические функции по формулам Колосова-Мусхелишвили [7].

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right], \tag{5}$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\Phi'(z), \tag{6}$$

$$2\mu(u' + iv') = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\Phi'(z), \tag{7}$$

где

$$\Omega(z) = \overline{\Phi}(z) + z\overline{\Phi'}(z) + \overline{\Psi}(z).$$

Из формул (5)–(7), учитывая начальные и краевые условия (1)–(4), получена задача сопряжения, решение которой приводит к уравнению типа Фредгольма второго рода в пространстве изображений Лапласа.

Решение приведенной задачи о движении двух защемленных полупространств, эквивалентное задаче для двух полубесконечных коллинеарных разрезов в упругой плоскости, получено в виде

$$\frac{2\mu}{\kappa+1}\frac{\partial a(x,t)}{\partial x} = \frac{\operatorname{sgn} x}{\pi\sqrt{x^2 - l^2}}\left(\int_{-L}^{-l} - \int_{l}^{L}\right)\frac{\sqrt{\xi^2 - l^2}}{\xi - x}\left(\eta\frac{\partial a(\xi,t)}{\partial t} - q\right)d\xi,\ l < |x| < L, \tag{8}$$

откуда

$$\frac{2\mu}{\kappa+1}a'(x,t) = -\frac{\operatorname{sgn} x}{\pi\sqrt{x^2 - l^2}}\int_{l}^{L}\frac{2\xi\sqrt{\xi^2 - l^2}}{\xi^2 - x^2}\left(\eta\frac{\partial a(\xi,t)}{\partial t} - q\right)d\xi,\ l < |x| < L. \tag{9}$$

Проинтегрировав обе части (9) по x от l до x, получим

$$\frac{2\mu}{\kappa+1}a(x,t) = -\int_{l}^{L}L(x,\xi)\left[\eta\frac{\partial a(\xi,t)}{\partial t} - q\right]d\xi, \tag{10}$$

где обозначено

$$L(x,\xi) = \frac{2}{\pi}\xi\sqrt{\xi^2 - l^2}\int_{l}^{x}\frac{d\varsigma}{\sqrt{\varsigma^2 - l^2}\left(\xi^2 - \varsigma^2\right)}. \tag{11}$$

Вычислив интеграл

$$\int_{l}^{x}\frac{d\varsigma}{\sqrt{\varsigma^2 - l^2}(\xi^2 - \varsigma^2)} = -\int_{1/l}^{1/x}\frac{1}{\sqrt{\alpha^{-2} - l^2}(\xi^2 - \alpha^{-2})}\frac{d\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{2\xi\sqrt{\xi^2 - l^2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{\xi^2 - l^2} + \xi\sqrt{x^2 - l^2}}{x\sqrt{\xi^2 - l^2} - \xi\sqrt{x^2 - l^2}}\right|,$$

получим

$$L(x,\xi) = \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x\sqrt{\xi^2 - l^2} + \xi\sqrt{x^2 - l^2}}{x\sqrt{\xi^2 - l^2} - \xi\sqrt{x^2 - l^2}}\right|. \tag{12}$$

Применив к обеим частям уравнения (10) преобразование Лапласа с параметром p по времени t с учетом (3), получим интегральное уравнение в пространстве изображений

$$a(x,p)+\eta_* p\int_l^L L(x,\xi)\left[a(\xi,p)-\frac{a_0(\xi)}{p}\right]d\xi=\frac{q}{p}f(x),\ x>l, \tag{13}$$

$$\eta_*=\frac{\kappa+1}{2\mu}\eta,$$

$$f(x)=\frac{\kappa+1}{2\mu}\left[L\ln\left|\frac{L\sqrt{x^2-l^2}+x\sqrt{L^2-l^2}}{L\sqrt{x^2-l^2}-x\sqrt{L^2-l^2}}\right|-x\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-l^2}+\sqrt{L^2-l^2}}{\sqrt{x^2-l^2}-\sqrt{L^2-l^2}}\right|\right]. \tag{14}$$

На промежутке (l,L) введем функцию $b(x,t)$ по формуле

$$b(x,t)=a(x,t)-a_0(x),\ l<x<L. \tag{15}$$

Применив к обеим частям (44) преобразование Лапласа, получим

$$b(x,p)=a(x,p)-\frac{a_0(x)}{p},\ l<x<L. \tag{16}$$

Для определения функции $b(x,p)$ на промежутке (l,L) из уравнения (13) с учетом (16) получим интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода в пространстве изображений Лапласа с симметрическим ядром

$$b(x,p)+\eta_* p\int_l^L L(x,\xi)b(\xi,p)d\xi=\frac{q}{p}f(x)-\frac{1}{p}a_0(x),\ l<x<L. \tag{17}$$

Решим уравнение (17) численно-аналитическим методом. Для этого разложим ядро $L(\beta,\gamma)$ в двойной ряд по системе ортонормированных функций $\omega_n(\beta)$, $(n=1,2,\ldots)$

$$L(\beta,\gamma)=\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{mn}\omega_m(\beta)\omega_n(\gamma),\ l<\beta,\gamma<L, \tag{18}$$

где коэффициенты разложения равны

$$A_{mn}=\int_l^L\int_l^L L(\beta,\gamma)\omega_m(\beta)\omega_n(\gamma)d\beta d\gamma. \tag{19}$$

Обозначим через $\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(n)}$ собственные векторы, соответственно собственных значений $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, расположенных в порядке возрастания модулей. Собственные функции $\psi_n(\beta)$ удовлетворяют однородному уравнению

$$\psi_n(\beta)-\lambda_n\int_l^L L(\beta,\gamma)\psi_n(\gamma)d\gamma=0,\ l<\beta<L,\ n=1,2,\ldots. \tag{20}$$

и выражаются через компоненты $\alpha_k^{(n)}$ $(k=1,2,\ldots)$ собственных векторов $\alpha^{(n)}$ по формулам

$$\psi_n(\beta)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(n)}\omega_k(\beta),\ l<\beta<L. \tag{21}$$

Тогда решение уравнения (17) примет вид

$$b(x,p)=\frac{qf(x)-a_0(x)}{p}-\eta_*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(qf-a_0,\psi_n)}{\lambda_n+\eta_* p}\psi_n(x),\ l<x<L, \tag{22}$$

$$b(x,p)=\frac{qf(x)-a_0(x)}{p}-\eta_*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_n}{\lambda_n+\eta_* p}\psi_n(x),\ l<x<L, \tag{23}$$

где

$$(qf,\psi_n)=\int_l^L qf(\xi)\psi_n(\xi)d\xi=\frac{\kappa+1}{2\mu}q\int_l^L\psi_n(\xi)d\xi\int_l^L L(\xi,\zeta)d\zeta=$$

$$=\frac{\kappa+1}{2\mu}\frac{q}{\lambda_n}\sqrt{L-l}\alpha_1^{(n)}=\frac{\kappa+1}{2\mu}q\sqrt{L-l}\frac{\alpha_1^{(n)}}{\lambda_n}, \tag{24}$$

$$M_n=(qf-a_0,\psi_n)=\frac{\kappa+1}{2\mu}q\sqrt{L-l}\frac{1}{\lambda_n}\alpha_1^{(n)}-\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(n)}a_{0k}, \tag{25}$$

$$a_{0k}=\int_l^L a_0(x)\omega_k(x)dx. \tag{26}$$

Обращая решение (22) и учитывая (15), получим формулу, определяющую величину разрыва перемещений $a(x,t)$ в вязкой зоне

$$a(x,t)=qf(x)-\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}M_n\alpha_k^{(n)}e^{-\lambda_n t/\eta_*},\ l<|x|<L. \tag{27}$$

Из (25) дифференцированием по t получим скорость взаимной подвижки берегов в вязкой зоне

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{\eta_*}\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n M_n\alpha_k^{(n)}e^{-\lambda_n t/\eta_*},\ l<|x|<L. \tag{28}$$

Величина разрыва перемещений при $|x|>l$ (т. е. в зоне вязкости и зоне крипа), как это следует из (10) с учетом (28), определится формулой

$$a(x,t)=qf(x)-\sum_{k=1}^{\infty}L_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n M_n\alpha_k^{(n)}e^{-\lambda_n t/\eta_*},\ |x|>l, \tag{29}$$

где

$$L_k(x)=\int_l^L L(x,\xi)\omega_k(\xi)d\xi. \tag{30}$$

При $l<|x|<L$ формулы (29) и (27) совпадают, если учесть соотношение (10).

Представим расчетные формулы для вычисления $a(x,t)$

$$qf(x)=\frac{\kappa+1}{2\mu}\frac{q}{\pi}\left[L\ln\left|\frac{L\sqrt{x^2-l^2}+x\sqrt{L^2-l^2}}{L\sqrt{x^2-l^2}-x\sqrt{L^2-l^2}}\right|-x\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-l^2}+\sqrt{L^2-l^2}}{\sqrt{x^2-l^2}-\sqrt{L^2-l^2}}\right|\right], \tag{31}$$

$$qf(L)=\lim_{x\to L}qf(x)=\frac{\kappa+1}{\mu}\frac{q}{\pi}L\ln\frac{L}{l}, \tag{32}$$

$$a(x,t)=qf(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(f-a_0,\psi_n)\psi_n(x)e^{\lambda_n t/\eta_*},\ l<x<L, \tag{33}$$

$$a(x,t)=qf(x)-\frac{\kappa+1}{2\mu}q\sqrt{L-l}\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\alpha_1^{(n)}\alpha_k^{(n)}e^{-\lambda_n/\eta_*}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{0k}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_m(x)\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_k^{(n)}\alpha_m^{(n)}e^{-\lambda_n t/\eta_*},$$

$$l<x<L, \tag{34}$$

$$a(x,t)=qf(x)-\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_k^{(n)}e^{-\lambda_n t/\eta_*}\left(\frac{\kappa+1}{2\mu}q\sqrt{L-l}\frac{1}{\lambda_n}\alpha_1^{(n)}-\sum_{m=1}^{\infty}a_{0m}\alpha_m^{(n)}\right),$$

$$l<x<L. \tag{35}$$

Обозначим

$$M_n=M_n^1-M_n^0, \tag{36}$$

$$M_n^1=(qf,\psi_n),\ M_n^0=(a_0,\psi_n),\ M_n^1=\frac{\kappa+1}{2\mu}q\sqrt{L-l}\frac{1}{\lambda_n}\alpha_1^n,$$

$$M_n^0=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(n)}a_{0k},\ a_{0k}=\int_l^L a_0(x)\omega_k(x)dx.$$

Подвижку на разломе $a(x,t)$ можно записать в виде

$$a(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}M_n^1\alpha_k^{(n)}-\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}M_n\alpha_k^{(n)}e^{-\lambda_n t/\eta_*}=$$

$$=a_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_k^{(n)}M_n(1-e^{-\lambda_n t/\eta_*}). \tag{37}$$

Из (37) дифференцированием по t получим скорость взаимной подвижки берегов при $l<x<L$

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{\eta_*}\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n M_n\alpha_k^{(n)}e^{-\lambda_n t/\eta_*},\ \ l<x<L. \tag{38}$$

Величина подвижки при $|x|>l$, как это следует из (10) с учетом (38), определится формулой

$$a(x,t)=qf(x)-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(qf-a_0,\psi_n)e^{-\lambda_n t/\eta_*}\int_l^L L(x,\xi)\psi_n(\xi)d\xi,\ x>l, \tag{39}$$

где

$$\int_l^L L(x,\xi)\psi_n(\xi)d\xi=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(n)}\int_l^L L(x,\xi)\omega_k(\xi)d\xi=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(n)}L_k(x),$$

$$L_k(x)=\int_l^L L(x,\xi)\omega_k(\xi)d\xi,\ L_{mn}=\int_l^L\int_l^L L(x,\xi)\omega_m(x)\omega_n(\xi)dxd\xi.$$

Формулу (39) можно записать в виде

$$a(x,t)=qf(x)-\sum_{k=1}^{\infty}L_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n M_n\alpha_k^{(n)}e^{-\lambda_n t/\eta_*}, \tag{40}$$

где M_n определено формулой (25).

Скорость подвижки на разломе при $x>l$ определится формулой

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{\eta_*}\sum_{k=1}^{\infty}L_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 M_n\alpha_k^{(n)}e^{-\lambda_n t/\eta_*},\ x>l. \tag{41}$$

Скорость подвижки на разломе $l < x < L$, $y = 0$ при $t = 0$ и $a_0(x) = 0$ из (38) с учетом (25) получим в виде

$$\frac{\partial a(x,t=0)}{\partial t} = \frac{1}{\eta_*}\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n M_n \alpha_k^{(n)} = \frac{q\sqrt{L-l}}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(x)\delta_{1k} = \frac{q}{\eta}, \quad l < x < L. \qquad (42)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моги К.* Предсказание землетрясений. М.: Мир, 1988. 382 с.
2. *Ержанов Ж.С., Ким А.С.* О локализации напряжений в окрестности разлома в предварительно напряженном полупространстве // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1987. № 1. С. 76-81.
3. *Ким А.С.* Эволюция напряженно-деформированного состояния в зоне барьера на границе литосферных плит / VIII Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. М., 1991. С. 187.
4. *Ким А.С.* Асейсмическое скольжение вдоль разлома в породном массиве перед разрушением // Сборник трудов международной конференции «Геодинамика и напряженное состояние недр Земли». Новосибирск, 2003. С. 141-144.
5. *Баймухаметов А.А., Ким А.С.* Напряженно-деформированное состояние земной коры в зоне глубинного разлома // Вестник НИА РК. 2006. № 1. С. 50-54.
6. *Ким А.С.* Медленные движения земной коры и концентрация напряжений в зоне вязкоупругого разлома // Доклады НАН РК. 2006. № 2. С. 73-76.
7. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Summary

Using mathematics modeling methods we studied stress-strain evolution on the block structure boundary in the tectonic fracture zone. The initial boundary problem is transformed to the mating problem, the solution of which will reduce to Fredholm’s equation of the second kind according to Laplace transform . With the help of analytically-numeric methods, we have got the solution of integral equation, on the base of which the displacement, velocity and stress in the fracture zone.

Поступила 30.04/07г.