Ж. Ж. БАЙГУНЧЕКОВ[*], Б. К. НУРАХМЕТОВ[*], Э. М. МАЖИЕВА[**]

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ БИНАРНОГО ЗВЕНА ВИДА ВЦ

С элементами j-ой вращательной и k-ой цилиндрической кинематических пар бинарного звена вида **ВЦ** (рис. 1) (где В – вращательная, Ц – цилиндрическая кинематические пары) жестко связываем правые декартовы координат $U_jV_jW_j$ и $X_kY_kZ_k$, координатные оси которых выбираются следующим образом:

– координатные оси W_j и Z_k, лежат соответственно на оси вращения j-ой вращательной, вращения и поступательного движения k-ой цилиндрической кинематических пар;

– начало системы координат $U_jV_jW_j$ находится в произвольно выбранной точке 0_j, лежащей на оси вращения W_j вращательной кинематической пары j;

– начало системы координат $X_kY_kZ_k$ находятся в точке O_k пересечения общего перпендикуляра t_{jk} между осями W_j и Z_k и осью Z_k;

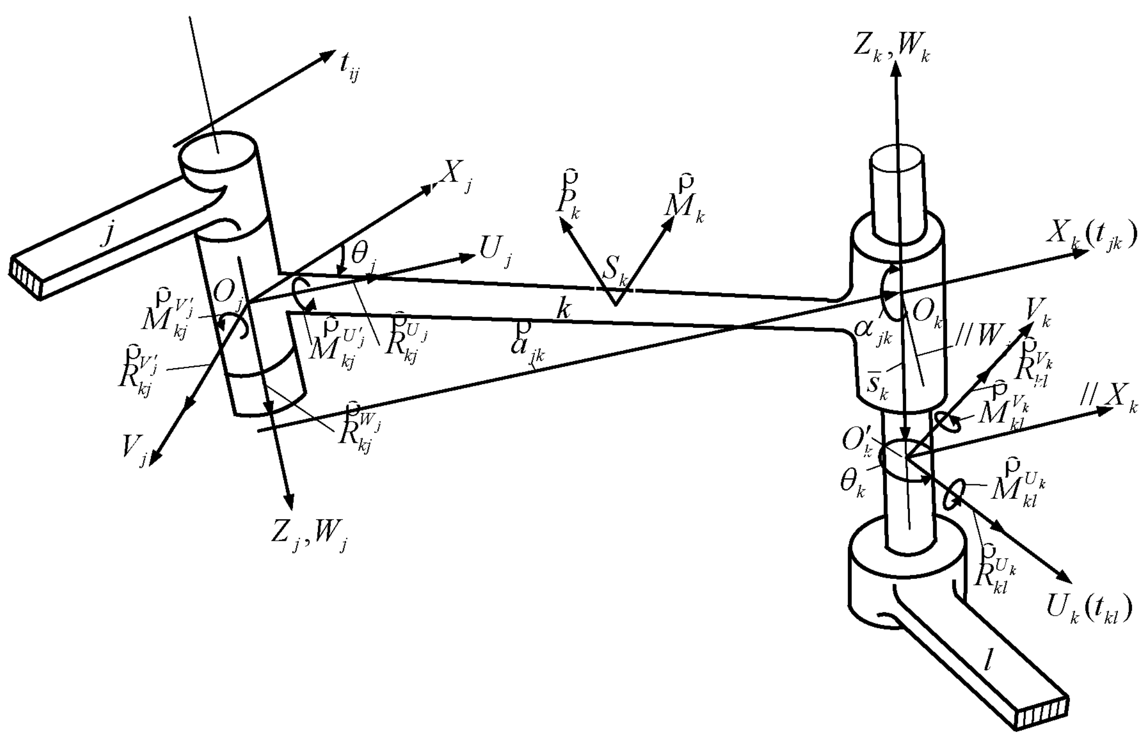
– координатная ось U_j параллельна общему перпендикуляру t_{jk} и их положительные направления совпадают;

– координатная ось X_k лежит вдоль общего перпендикуляра t_{jk} и их положительные направления совпадают;

– координатные оси V_j и Y_k дополняют правые декартовы систем координат;

Все внешние силы и моменты, действующие на звено k, в том числе силы и моменты сил инерции звена, приводим в точку приведения S_k к главному вектору $\vec{P}_k$ и главному моменту $\vec{M}_k$. Под действием $\vec{P}_k$ и $\vec{M}_k$ в кинематических парах j и k возникают силы реакции.

В кинематической паре j бинарного звена k силы реакции, действующие на бинарное звено k со стороны звена j, приведены в точку O_j – начале систем координат $X_jY_jZ_j$ и $U_jV_jW_j$ и заменены главными векторами сил и моментов реакции $\vec{R}_{kj}$ и $\vec{M}_{kj}$, которые в системе $U_jV_jW_j$ имеют компоненты



Бинарное звено вида **ВЦ**

$$\left.\begin{aligned}\vec{R}_{kj} &= \left[R_{kj}^{U_j}, R_{kj}^{V_j}, R_{kj}^{W_j}\right]\\ \vec{M}_{kj} &= \left[M_{kj}^{U_j}, M_{kj}^{V_j}, 0\right]\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

В кинематической паре k силы реакции, действующие на бинарное звено k со стороны звена l, приведены в точку O'_k – начале системы координат $U_kV_kW_k$ и заменены главными векторами сил и моментов реакции, которые в системах координат $U_kV_kW_k$ и $U_jV_jW_j$ имеют компоненты

$$\left.\begin{aligned}\vec{R}_{kl} &= \left[R_{kl}^{U_k}, R_{kl}^{V_k}, 0\right]\\ \vec{M}_{kl} &= \left[M_{kl}^{U_k}, M_{kl}^{V_k}, 0\right]\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и

$$\left.\begin{aligned}\vec{R}_{kl} &= \left[R_{kl}^{U_j}, R_{kl}^{V_j}, R_{kl}^{W_j}\right]\\ \vec{M}_{kl} &= \left[M_{kl}^{U_j}, M_{kl}^{V_j}, M_{kl}^{W_j}\right]\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Аналогично можно выразить компоненты главных вектора $\vec{P}_k$ и момента $\vec{M}_k$ внешних сил и моментов в координатной системе $U_jV_jW_j$

$$\left.\begin{aligned}\vec{P}_{k} &= \left[P_{k}^{U_j}, P_{k}^{V_j}, P_{k}^{W_j}\right]\\ \vec{M}_{k} &= \left[M_{k}^{U_j}, M_{k}^{V_j}, M_{k}^{W_j}\right]\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Главный вектор $\vec{P}_k$ и главный момент $\vec{M}_k$ внешних сил, а также силу и момент реакции $\vec{R}_{kl}$ и $\vec{M}_{kl}$ в кинематической паре k приведем в точку O_j – начале систем координат $X_jY_jZ_j$ и $U_jV_jW_j$.

Тогда уравнения равновесия бинарного звена k вида **ВЦ** имеют вид

$$\left.\begin{aligned}R_{kj}^{U_j} + R_{kl}^{U_j} + P_k^{U_j} &= 0\\ R_{kj}^{V_j} + R_{kl}^{V_j} + P_k^{V_j} &= 0\\ R_{kj}^{W_j} + R_{kl}^{W_j} + P_k^{W_j} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

и

$$\left.\begin{aligned}M_{kj}^{U_j} + M_{kl}^{U_j} + M_{O_j}^{U_j}\left(\vec{R}_{kl}\right) + M_k^{U_j} + M_{O_j}^{U_j}\left(\vec{P}_k\right) &= 0\\ M_{kj}^{V_j} + M_{kl}^{V_j} + M_{O_j}^{V_j}\left(\vec{R}_{kl}\right) + M_k^{V_j} + M_{O_j}^{V_j}\left(\vec{P}_k\right) &= 0\\ M_{kl}^{W_j} + M_{O_j}^{W_j}\left(\vec{R}_{kl}\right) + M_k^{W_j} + M_{O_j}^{W_j}\left(\vec{P}_k\right) &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где компоненты силы реакции $\vec{R}_{kl}$ и момента реакции $\vec{M}_{kl}$ в системах координат $U_jV_jW_j$ и $U_kV_kW_k$ связаны между собой следующими матричными уравнениями

$$\begin{bmatrix} R_{kl}^{U_j}\\ R_{kl}^{V_j}\\ R_{kl}^{W_j}\end{bmatrix} = \left[g_{jk}\right]^{ВЦ} \cdot \left[p_k\right]^{Ц} \cdot \begin{bmatrix} R_{kl}^{U_k}\\ R_{kl}^{U_k}\\ 0\end{bmatrix}, \qquad (7)$$

$$\begin{bmatrix} M_{kl}^{U_j}\\ M_{kl}^{V_j}\\ M_{kl}^{W_j}\end{bmatrix} = \left[g_{jk}\right]^{ВЦ} \cdot \left[p_k\right]^{Ц} \cdot \begin{bmatrix} M_{kl}^{U_k}\\ M_{kl}^{U_k}\\ 0\end{bmatrix}, \qquad (8)$$

где $\left[g_{jk}\right]^{ВЦ}$ и $\left[p_k\right]^{Ц}$ – подматрицы вращений матриц бинарного звена k вида **ВЦ** (9) и цилиндрической кинематической пары k (10) , которые имеют вид

$$\left[g_{jk}\right]^{ВЦ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha_{jk} & -\sin\alpha_{jk}\\ 0 & \sin\alpha_{jk} & \cos_{jk}\end{bmatrix}, \qquad (9)$$

$$\left[p_k\right]^{Ц} = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k & 0\\ \sin\theta_k & \cos\theta_k & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (10)$$

Подставляя подматриц вращения (9) и (10) в уравнения (7) и (8), получим

$$\left.\begin{aligned}R_{kl}^{U_j} &= l_{11}^k R_{kl}^{U_k} + l_{12}^k R_{kl}^{V_k}\\ R_{kl}^{V_j} &= l_{21}^k R_{kl}^{U_k} + l_{22}^k R_{kl}^{V_k}\\ R_{kl}^{W_j} &= l_{31}^k R_{kl}^{U_k} + l_{32}^k R_{kl}^{V_k}\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

и

$$\left.\begin{aligned}M_{kl}^{U_j} &= l_{11}^k M_{kl}^{U_k} + l_{12}^k M_{kl}^{V_k}\\ M_{kl}^{V_j} &= l_{21}^k M_{kl}^{U_k} + l_{22}^k M_{kl}^{V_k}\\ M_{kl}^{W_j} &= l_{31}^k M_{kl}^{U_k} + l_{32}^k M_{kl}^{V_k}\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

где

$$l_{11}^k = \cos\theta_k, l_{12}^k = -\sin\theta_k, l_{13}^k = 0,$$
$$l_{21}^k = \cos\alpha_{jk} \sin\theta_k,$$
$$l_{22}^k = \cos\alpha_{jk} \cos\theta_k, l_{23}^k = -\sin\alpha_{jk},$$
$$l_{31}^k = \sin\alpha_{jk} \sin\theta_k,$$
$$l_{32}^k = \sin\alpha_{jk} \cos\theta_k, l_{33}^k = \cos\alpha_{jk}.$$

Тогда уравнения сил (5) бинарного звена k принимают вид

$$\left.\begin{aligned} R_{kj}^{U_j} + l_{11}^k R_{kl}^{U_k} + l_{12}^k R_{kl}^{V_k} &= -P_k^{U_j} \\ R_{kj}^{V_j} + l_{21}^k R_{kl}^{U_k} + l_{22}^k R_{kl}^{V_k} &= -P_k^{V_j} \\ R_{kj}^{W_j} + l_{31}^k R_{kl}^{U_k} + l_{32}^k R_{kl}^{V_k} &= -P_k^{W_j} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

В системе уравнений (6) величины $M_{O_j}^{U_j}(\vec{R}_{kl})$, $M_{O_j}^{V_j}(\vec{R}_{kl})$ и $M_{O_j}^{W_j}(\vec{R}_{kl})$ являются компонентами вектора момента силы реакции $\vec{R}_{kl}$ относительно точки O_j в системе координат $U_jV_jW_j$, определяемого выражением

$$\vec{M}_{O_j}(\vec{R}_{kl}) = \vec{r}_j^{\,O_k'} \times \vec{R}_{kl} = \begin{vmatrix} \vec{u}_j & \vec{v}_j & \vec{w}_j \\ U_j^{O_k'} & V_j^{O_k'} & W_j^{O_k'} \\ R_{kl}^{U_j} & R_{kl}^{V_j} & R_{kl}^{W_j} \end{vmatrix}, \quad (14)$$

где $\vec{u}_j, \vec{v}_j, \vec{w}_j$ – единичные векторы системы координат $U_jV_jW_j$, а $U_j^{O_k'}, V_j^{O_k'}, W_j^{O_k'}$ – координаты точки приложения O_k' силы реакции $\vec{R}_{kl}$ в системе координат $U_jV_jW_j$.

Кроме того, точка O_k' в системе координат $X_kY_kZ_k$ имеет координаты $[0,0,s_k]$. Тогда между координатами точки O_k' в системах координат $U_jV_jW_j$ и $X_kY_kZ_k$ существует связь в виде уравнения

$$\begin{bmatrix} 1 \\ U_j^{O_k'} \\ V_j^{O_k'} \\ W_j^{O_k'} \end{bmatrix} = \left[G_{jk}\right]^{ВЦ} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ s_k \end{bmatrix} \quad (15)$$

Подставляя матрицу $\left[G_{jk}\right]^{ВЦ}$ бинарного звена вида **ВЦ** (9) в уравнение (15), получим

$$\left.\begin{aligned} U_j^{O_k'} &= a_{jk} \\ V_j^{O_k'} &= -s_k \sin\alpha_{jk} \\ W_j^{O_k'} &= c_{jk} s_k \cos\alpha_{jk} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Если подставить (16) и (11) в определитель (14) и раскрыть его относительно элементов первой строки, то получим

$$\left.\begin{aligned} M_{O_j}^{U_j}(\vec{R}_{kl}) &= h_{11}^k R_{kl}^{U_k} + h_{12}^k R_{kl}^{V_k} \\ M_{O_j}^{V_j}(\vec{R}_{kl}) &= h_{21}^k R_{kl}^{U_k} + h_{22}^k R_{kl}^{V_k} \\ M_{O_j}^{W_j}(\vec{R}_{kl}) &= h_{31}^k R_{kl}^{U_k} + h_{32}^k R_{kl}^{V_k} \end{aligned}\right\}, \quad (17)$$

где

$$h_{11}^k = -s_k \sin\theta_k - c_{jk} \cos\alpha_{jk} \sin\theta_k,$$
$$h_{12}^k = -s_k \cos\theta_k - c_{jk} \cos\alpha_{jk} \cos\theta_k,$$
$$h_{21}^k = c_{jk} \cos\theta_k + s_k \cos\alpha_{jk} \cos\theta_k - $$
$$- a_{jk} \sin\alpha_{jk} \sin\theta_k,$$
$$h_{22}^k = c_{jk} \sin\theta_k - s_k \cos\alpha_{jk} \sin\theta_k - $$
$$- a_{jk} \sin\alpha_{jk} \cos\theta_k,$$
$$h_{31}^k = a_{jk} \cos\alpha_{jk} \sin\theta_k - s_k \sin\alpha_{jk} \cos\theta_k,$$
$$h_{32}^k = a_{jk} \cos\alpha_{jk} \cos\theta_k - s_k \sin\alpha_{jk} \sin\theta_k.$$

Подставляя полученные выражения компонентов момента $\vec{M}_{O_j}(\vec{R}_{kl})$ и выражения компонентов момента $\vec{M}_{kl}$ из (12) в систему уравнений (6), получим окончательный вид уравнений моментов бинарного звена k вида **ВЦ**

$$\left.\begin{aligned} & M_{kj}^{U_j} + l_{11}^k M_{kl}^{U_k} + l_{12}^k M_{kl}^{V_k} + h_{11}^k R_{kl}^{U_k} + \\ & \qquad + h_{12}^k R_{kl}^{V_k} = -M_k^{U_j} - M_{O_j}^{U_j}(\vec{P}_k) \\ & M_{kj}^{V_j} + l_{21}^k M_{kl}^{U_k} + l_{22}^k M_{kl}^{V_k} + h_{21}^k R_{kl}^{U_k} + \\ & \qquad + h_{22}^k R_{kl}^{V_k} = -M_k^{V_j} - M_{O_j}^{V_j}(\vec{P}_k) \\ & l_{31}^k M_{kl}^{U_k} + l_{32}^k M_{kl}^{V_k} + h_{31}^k R_{kl}^{U_k} + h_{32}^k R_{kl}^{V_k} = \\ & \qquad = -M_k^{V_j} - M_{O_j}^{V_j}(\vec{P}_k) \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

которые совместно с уравнениями сил (13) образуют уравнения равновесия рассматриваемого бинарного звена.

Системы уравнений равновесия (13) и (8) имеют следующие матричные формы

$$\left[R_{kj}\right]=\left[L_{jk}\right]\cdot\left[R_{kl}\right]+\left[Q_k\right], \qquad (19)$$

$$\left[M_{kj}\right]=\left[L_{jk}\right]\cdot\left[M_{kl}\right]+\left[H_{jk}\right]\cdot\left[R_{kl}\right]+\left[M_k\right], \quad (20)$$

где

$$\left[R_{kj}\right]=\begin{bmatrix}R_{kj}^{U_j}\\ R_{kj}^{V_j}\\ R_{kj}^{W_j}\end{bmatrix},\ \left[R_{kl}\right]=\begin{bmatrix}R_{kl}^{U_k}\\ R_{kl}^{V_k}\\ 0\end{bmatrix},\ \left[Q_k\right]=-\begin{bmatrix}P_k^{U_j}\\ P_k^{V_j}\\ P_k^{W_j}\end{bmatrix},$$

$$\left[M_{kl}\right]=\begin{bmatrix}M_{kl}^{U_k}\\ M_{kl}^{V_k}\\ 0\end{bmatrix},\ \left[M_{kj}\right]=\begin{bmatrix}M_{kj}^{U_j}\\ M_{kj}^{V_j}\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\left[M_k\right]=-\begin{bmatrix}M_k^{U_j}+M_{O_j}^{U_j}\left(\vec{P}_k\right)\\ M_k^{V_j}+M_{O_j}^{V_j}\left(\vec{P}_k\right)\\ M_k^{W_j}+M_{O_j}^{W_j}\left(\vec{P}_k\right)\end{bmatrix},$$

$$\left[L_{jk}\right]=-\begin{bmatrix}l_{11}^k & l_{12}^k & 0\\ l_{21}^k & l_{22}^k & l_{23}^k\\ l_{31}^k & l_{32}^k & l_{33}^k\end{bmatrix},$$

$$\left[H_{jk}\right]=-\begin{bmatrix}h_{11}^k & h_{12}^k & 0\\ h_{21}^k & h_{22}^k & 0\\ h_{31}^k & h_{32}^k & 0\end{bmatrix}$$

ЛИТЕРАТУРА

Baigunchekov Zh.Zh., Nurakhmetov B.K. and et. ab. Kinematics of the Parallel Manipulators with Functionally Independent Drives (Part I and II). The XI World IFToMM Congress. 1-4 April, 2004, Tianjin, China. 1647-1656 р.ъ

Резюме

Ғылыми жұмыста АЦ түрлі бинарлық буынның матрицалық және теңдік теңдеулері алынды (А – айналмалы, Ц – цилиндрлі кинематоикалық жұп).

Summary

In the given paper the equilibrium equations of a **RC** binary link are made.

УДК 621.01

*Казахстанско-Британский технический университет;

**Алматинский технологический университет*

Поступила 3.05.07г.