УДК 658.012.122:519.21

С. М. БЛИНЦОВ

СХЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ В МОРСКИХ ПОРТАХ

Рассматриваются некоторые типы Марковских процессов для моделирования взаимодействия транспортных потоков в морских портах.

Математическое моделирование процессов взаимодействия встречных потоков транспорта в пунктах перевалки грузов приводит к необходимости исследовать достаточно широко и малоизученный класс марковских процессов, имеющих ряд специфических свойств. Эти процессы позволяют адекватно описывать работу производственных систем, обладающих одновременно признаками систем массового обслуживания и управления запасами. Такого рода системы можно назвать системами массового обслуживания со складированием (СМОС). В [1] приведена укрупненная классификация моделей СМОС, отражающая основные черты таких реальных объектов, как транспортные узлы, порты, портово-промышленные объединения, транспортно-складские предприятия, бункеровочные базы и др. Исследование различных моделей СМОС позволит создать методическую основу, необходимую для оптимального проектирования перечисленных производственных систем и управления их деятельностью.

В данной работе описаны некоторые типы марковских процессов, которые могут быть использованы для аналитического изучения и определения основных показателей эффективности функционирования СМОС определенного вида. Они частично обобщают введенные в работе [2] так называемые цепи Маркова с накоплением, а также обычные полумарковские процессы [3].

Полумарковский процесс с накоплением. Пусть имеется случайный процесс $\{Y(t), \xi(t)\}$, где $Y(t)$ – полумарковский процесс, определенный на конечном счетном множестве F, а непрерывная компонента $\xi(t)$ определена на положительной полуоси. Время нахождения $Y(t)$ в состоянии $k \in F$ распределено по закону $A_к(t)$ с конечным первым моментом, и переходы полумарковского процесса из одного состояния в другое регулируются матрицей $\|\pi_{ik}\| i,k \in F$. Вложенная цепь Маркова $Y(t_n+0)$ где t_n, $n \geq 1$ – момент n-го по счету изменения состояния процесса $Y(t)$, предполагается сильно положительно возвратной [3], и все первые моменты $\alpha_{1к} = \int_0^\infty (1 - A_к(t))dt$ равномерно ограничены.

Обозначим через F^+, F^-, F^0 попарно непересекающиеся подмножества множества F, такие, что $F = F^+ \Upsilon F^- \Upsilon F^0, F^+ \neq \varnothing$, и будем считать, что компонента $\xi(t)$ возрастает со скоростью $v_k > 0$ $(0 < v_k < c' < \infty)$, если $Y(t) = k \in F^+$, убывает со скоростью $-v_i (0 < v_i < c'' < +\infty)$, если $Y(t) = i \in F^-$, и $\xi(t)$ не изменяется при $Y(t) = j \in F^0$, $\xi(t) > 0$.

Если в некоторый момент времени τ, когда $Y(\tau) = i \in F^-$, компонента $\xi(t)$ обращается в нуль, то она будет сохранять это значение до тех пор, пока $Y(t)$, $t > \tau$, не попадет в какое-либо состояние $k \in F^+$.

Определенный таким образом процесс $\{Y(t), \xi(t)\}$ назовем полумарковским процессом с накоплением.

Легко видеть, что вложенный процесс $\{Y(t_n+0), \xi(t_n+0)\}$ будет марковским. Обозначим $\Phi_k^n(x) = P\{Y(t_n+0) = k,\ \xi(t_n+0) \leq x\}$. Тогда по формуле полной вероятности получим следующее рекуррентное соотношение:

$$\Phi_k^{m1}(x) = \sum_{i \in F^-} \pi_{ik} \int_0^{x/v_i} \Phi_i^n(x - v_i\tau) dA_i(\tau) +$$

$$+ \sum_{i \in F^-} \pi_{ik} \int^\infty \Phi_i^n(x - v_i\tau) dA_i(\tau) + \qquad (1)$$

$$+ \sum_{i \in F^0} \pi_{ik} \Phi_i^n(x),\ k + F,\ n \geq 0.$$

Можно показать, что при выполнении условия $-\infty < \sum_{K \in F} V_k P_k < 0$, где $\{P_k, k \in F\}$ - стационарное эргодическое распределение вероят-нос-тей полумарковского процесса $Y(t)$, существует предельное распределение вероятностей $\Phi_к(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_к^n(x), \quad k \in F$, не зависящее от начального распределения $\Phi_к^0(x), к \in F$. Из (1) тогда вытекает следующая система интегральных уравнений относительно функций $\Phi_к(x)$:

$$\Phi_к(x) = \sum_{i\in F} \pi_{ik} \int_0^{x/v_i} \Phi_i(x - v_i\tau) dA_i(\tau) +$$

$$+ \sum_{i\in F^-} \pi_{ik} \int_0^{\infty} \Phi_i(x - v_i\tau) dA_i(\tau) + \sum_{i\in F^0} \pi_{ik}\Phi_i(x), \in F$$

$$k \in F. \qquad (2)$$

Стационарное распределение $F_k(x) = = \lim_{t\to\infty} P\{Y(t) = k,\ \xi \le x\}$ выражается через $\Phi_к(x)$ по формулам:

$$F_k(x) = \frac{P_k}{\alpha_{1k}} \int_0^{x/v_k} (1 - A_k(\tau)) \frac{\Phi_к(x - v_k\tau)}{\Phi_к(+\infty)} d\tau,$$

$$k \in F^+,$$

$$F_k(x) = \frac{P_k}{\alpha_{1k}} \int_0^{\infty} (1 - A_k(\tau)) \frac{\Phi_к(x - v_k\tau)}{\Phi_к(+\infty)} d\tau,$$

$$k \in F^-,$$

$$F_k(x) = P_k \frac{\Phi_к(x)}{\Phi_к(+\infty)}, \ к \in F^0.$$

Если F – конечное множество, то с помощью двустороннего преобразования Лапласа-Стилтьеса система (2) сводится к векторной краевой задаче Римана для полуплоскости, решаемой методом факторизации.

Отметим, что компонента $Y(t)$ может описывать процесс изменения длины очереди транспортных средств, перевозящих однородный груз, в системе обслуживания, а $\xi(t)$ - количество груза, находящегося на складе (бесконечной вместимости). Такая интерпретация полумарковского процесса с накоплением использовалась при анализе взаимодействия пуассоновского потока транспортных средств, прибывающих с грузом, с непрерывным видом транспорта, с помощью которого груз забирался со склада.

Цепь Маркова с накоплением, управляемая полумарковским процессом. Рассмотрим однородный марковский процесс $\xi(t)=\{Y(t), \eta(t); z(t); \xi(t)\}$, где $Y(t)$ – полумарковский процесс; $\eta(t)$ – время, прошедшее с момента последнего перехода полумарковского процесса $Y(t)$; $z(t)$ – цепь Маркова, управляемая процессом $Y(t)$; $\xi(t)$ – непрерывная компонента, характеризующая процесс накопления. Процесс $\zeta(t)$ определен на множестве состояний $\pi=\{F_1(0,+\infty)\cdot F_2(0,+\infty)\}$, где F_1, F_2 – конечные или счетные множества. В отношении процесса $Y(t)$ сохраним принятые выше предпосылки и обозначения. Задан набор чисел $\{v_{ki}\}$, $k\in F_1$, $i\in F_2$, имеющих смысл скоростей убывания или возрастания компоненты $\xi(t)$. Пусть $F_1\cdot F_2=F^+\cup F^-\cup F^0$, где подмножества $F\pm$, F^0 попарно не пересекаются и $F\pm$ - непусты, причем в F^+ входят только те состояния (k,i), для которых $V_{ki}>0$, в F^- входят состояния, для которых $V_{ki}<0$ и в F^0 - состояния с $V_{ki}=0$. Считаем, что

$$\spadesuit V_{ki}\spadesuit < c < +\infty,\ (k,i)\in F_1\cdot F_2.$$

Переходы цепи $z(t)$, определенной на множестве F_2, из одного состояния в другое в течение пребывания полумарковского процесса $Y(t)$ в состоянии $k\in F_1$ происходят в соответствии с матрицей интенсивностей переходов $\left\|\lambda_{ij}^k\right\|$, $i,j\in F_2$,

если $\xi(t)>0$, и в соответствии с матрицей $\left\|v_{ij}^k\right\|$, $(k,i)\in F^-\cup F^0$, $(k,j)\in F_1\cdot F_2$, если $\xi(t)=0$. Предполагается, что $\lambda_{ij}^k < c'_{kj} < +\infty, \quad v_{ij}^k < c''_{ij} < +\infty$.

Следовательно, процесс $\zeta(t)$ построен таким образом, что цепь с накоплением $\{z(t), \xi(t)\}$ сходластически управляется полумарковским процессом $Y(t)$.

Предположим, что

$$P\{Y(t)=k,\ \tau<\eta(t)<\tau+d\tau;\ z(t)=i,$$
$$x<\xi(t)<x+dx\}=P_{ki}(x;\tau;\ t)dxd\tau,\ k\in F_1,\ i\in F_2.$$
$$P^-\{Y(t)=k,\ \tau<\eta(t)<\tau+d\tau;\ z(t)=i,$$
$$\xi(t)=0\}=P_{ki}(\tau;\ t)d\tau,\ (k,i)\in F^0\cup F^-.$$

где $P_{ki}(x;\tau;\ t)$, $P_{ki}(\tau;\ t)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

Для функций

$$q_{ki}(x;;t) = \frac{P_{ki}(x;\tau;t)}{1 - A_k(\tau)}, k \in F_1, i \in F_2,$$

$$q_{ki}^-(\tau;t)=\frac{P_{ki}^-(\tau;t)}{1-A_k(\tau)},\ (k,i)\in F^0 \cup F^-$$

с помощью обычных вероятностных рассуждений можно вывести следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_{ki}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \tau}\right)q_{ki}(x;\tau;t)=$$
$$=-\lambda_i^k q_{ki}(x;\tau;t)+\sum_{j\neq i}\lambda_{ji}^k q_{kj}(x;\tau;t);$$
$$(k,i)\in F_1\cdot F_2;\ x>0,\ \tau>0$$

где $\lambda_i^k=\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}^k$. Соответствующие граничные условия имеют вид:

$$q_{ki}(x;0;t)=\sum_{m\neq k}\int_0^\infty q_{mi}(x;\tau;t)\pi_{mk}(A_m(\tau)),$$
$$(k,i)\in F_1\cdot F_2,\ x>0$$

$$q_{ki}^-(0;t)=\sum_{m\neq k}\int_0^\infty q_{mi}^-(\tau;t)\pi_{mk}dA_m(\tau),$$
$$(k,i)\in F^0 \cup F^-,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)q_{ki}^-(\tau;t)+v_{ki}q_{ki}(0;\tau;t)=$$
$$=-v_i^k q_{ki}^-(\tau;t)+\sum_{j\neq i}v_{ji}^k q_{kj}^-(\tau;t);\ (k,i)\in F^-;$$
$$(k,j)\in F^+$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \tau}\right)q_{ki}^-(\tau;t)+v_{ki}q_{ki}(0;\tau;t)=$$
$$=-v_i^k q_{ki}^-(\tau;t)+\sum_{j\neq i}v_{ji}^k q_{kj}^-(\tau;t);\ (k,j)\in F^0,$$
$$(k,i)\in F^0$$

$$\tau_{ki}q_{ki}(0;\tau;t)=\sum_{j\neq i}v_{ji}^k q_{kj}^-(\tau;t);\ (k,i)\in F^+,$$
$$(k,j)\in F^0 \cup F^-$$

где $v_i^k=\sum_{j\neq i}v_{ji}^k,\quad (k,j)\in F_1\cdot F_2$.

Кроме того, должно выполняться условие нормировки:

$$\sum_{(k,i)\in F_1\cdot F_2}\int_0^\infty\int_0^\infty q_{ki}(x;\tau;t)(1-A_k(\tau))d\tau\,dx+$$
$$+\sum_{(k,i)\in F^0 \cup F^-}\int_0^\infty q_{ki}^-(\tau,t)(1-A_k(\tau))d\tau=1.$$

Описанная цепь Маркова с накоплением, управляемая полумарковским процессом, служит удобным аппаратом исследования СМОС различных типов, например, со смешанным вариантом взаимодействия (т.е. со складским и прямым) встречных транспортных потоков [1]. При этом компоненты *Y(t)* и *Z(t)* могут интерпретироваться как длины очередей транспорта двух встречных потоков, а компонента $\xi(t)$ – как количество однородного груза, находящегося на складе неограниченной вместимости. Учет конечности вместимости склада производится аналогично тому, как это сделано для цепей Маркова с накоплением в [2].

Рассмотренные выше случайные процесс допускают обобщение на случай произвольного числа компонент типа $\xi(t)$, описывающих процессы накопления. Это позволит изучать более приближенные к действительности модели СМОС с неоднородным грузом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воеводский Е.Н., Постан М.Я.* Классификация стохастических моделей взаимодействия встречных транспортных потоков. Киев: АН УССР, 1987.

2. *Постан М.Я.* Применения Марковских процессов для моделирования систем обслуживания встречных транспортных потоков. Киев: АН УССР, 1989.

3. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. Киев: Наукова думка, 1976.

Резюме

Теңіз порттарында көлік ағындарының арақатынасын модельдеу үшін Марк үрдісінің кейбір түрлері қарастырылады.

Summary

In clause some types Markov's of processes for modeling interaction of transport flows in seaports are considered.

КазАТК *Поступила 2.03.07г.*