МАТЕМАТИКА

УДК 517.96.43

Н. К. БЛИЕВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Исследуются вопросы разрешимости в L_p, $p > 2$, одного модельного двумерного сингулярного интегрального уравнения. Такие интегральные уравнения являются существенным инструментом в изучении эллиптических и эллиптико-гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных от двух независимых переменных. Предлагаемая в работе методология применима и в более общих случаях.

Рассмотрим следующее сингулярное интегральное уравнение

$$a(z)\rho(z) + b(z)\overline{(\Pi\rho)(z)} = g(z), \qquad (1)$$

где $\overline{(\Pi\rho)(z)} = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\overline{\rho(\varsigma)}}{(\bar{\varsigma}-\bar{z})^2}d\xi\, d\eta$ – двумерный сингулярный интегральный оператор комплексно-сопряженный с сингулярным оператором

$$(\Pi\rho)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\rho(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2}d\xi\, d\eta,$$

$$z = x + iy, \quad \varsigma = \xi + i\eta,$$

G – единичный круг $\{|z| < 1\}$ в комплексной плоскости E; коэффициенты $a(z)$ и $b(z)$ заданные функции из $W_p^1(G),\ p > 2$, удовлетворяющие в замкнутом круге $\overline{G}$ условию

$$|a(z)| \neq |b(z)|, \quad |a(z)| \neq 0. \qquad (2)$$

Правая часть уравнения (1) $g(z) \in L_p(G),\ p > 2$. Неизвестную функцию $\rho(z)$ ищем также из $L_p(G),\ p > 2$, считая $\rho(z) = 0$ вне G.

Сингулярные интегралы $\overline{\Pi\rho}$ и $\Pi\rho$, понимаемые в смысле главного значения по Коши, являются ограниченными операторами в $L_p(G),\ p > 1$ [1] (см. также [2, 3]).

Сингулярные интегральные уравнения относительно $\Pi\rho$ и $\overline{\Pi\rho}$ находят широкие применения в изучении эллиптических и эллиптико-гиперболических дифференциальных уравнений и систем от двух независимых переменных [2–4]. До сих пор разрешимость таких (сингулярных) интегральных уравнений установлена в основном в L_p для значений p достаточно мало отличающихся от 2: $|p-2|<\varepsilon$. Они имеют и самостоятельное теоретическое значение для развития теории многомерных сингулярных интегральных уравнений.

Сингулярному интегральному уравнению

$$\rho(z) + q(z)(\Pi_E\rho)(z) = f(z),$$

где $q(z), |q(z)| < 1$, измеримая функция, Π_E – сингулярный интеграл по комплексной плоскости E, сводится нахождение гомеоморфизмов системы Бельтрами [2]. Разрешимость этого уравнения в $L_p(E)$ при любом $p>2$ впервые установлена В. С. Виноградовым [5].

Целью настоящей работы является исследование условий разрешимости уравнения (1) в $L_p(G)$, при любом $p>2$. Заметим, что случаи, когда $|a(z)| \le |b(z)|$ выходят за рамки работы [5].

Следуя [4], сводим уравнение (1) к задаче линейного сопряжения для кусочно обобщенных аналитических функций. Для этого введем в рассмотрение функцию

$$w(z) = T\rho \equiv -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\rho(\varsigma)}{\varsigma - z}d\xi\, d\eta,$$

где $\rho(z)$ искомое решение уравнения (1). Известно [2], что $w(z)$ принадлежит классу $C_\alpha(E)$, $\alpha = \frac{p-2}{p}$, функций непрерывных по Гёльдеру с показателем α на E, и голоморфна вне $\overline{G}$, обращается в нуль на бесконечности, а в G имеет обобщенные производные

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \rho(z), \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \Pi\rho.$$

В силу этого, уравнение (1) перепишется в виде

$$a(z)\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + b(z)\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)} = g(z).$$

Рассмотрим теперь функцию $\varphi(z)$, определенную на Е следующим образом:

$$\varphi(z)=\begin{cases} a(z)w(z)+b(z)\overline{w(z)}, & z\in G^{+}, \\ w(z), & z\in G^{-}, \end{cases} \qquad (3)$$

где $G^{+}=G, G^{-}=E-\overline{G}$. Легко видеть, что между совокупностями функций $\varphi(z)$ и $w(z)$ существует взаимно-однозначное соответствие. Функция $\varphi(z)$ удовлетворяет в Е дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}+A_1(z)\varphi+B_1(z)\overline{\varphi}=g(z), \qquad (4)$$

где

$$A_1(z)=\begin{cases} \dfrac{\overline{a(z)}\dfrac{\partial a}{\partial\overline{z}}-\overline{b(z)}\dfrac{\partial b}{\partial\overline{z}}}{|a(z)|^2-|b(z)|^2}, & z\in G^{+}, \\ 0, & z\in G^{-}. \end{cases},$$

$$B_1(z)=\begin{cases} \dfrac{b(z)\dfrac{\partial a}{\partial\overline{z}}-a(z)\dfrac{\partial b}{\partial\overline{z}}}{|a(z)|^2-|d(z)|^2}, & z\in G^{+} \\ 0, & z\in G^{-} \end{cases}. \qquad (5)$$

Ясно, что $A_1(z)$ и $B_1(z)\in L_{p,2}(E)$[1)], $p>2$ (см. [2]). Кроме того, на единичной окружности $\Gamma=\{|t|=1\}$ $\varphi(z)$ удовлетворяет граничному условию

$$\varphi^{+}(t)=a(t)\varphi^{-}(t)+b(t)\overline{\varphi^{-}(t)},\ \varphi^{-}(\infty)=0, \quad (6)$$

где $\varphi^{+}(t)$ и $\varphi^{-}(t)$ – граничные значения функции $\varphi(z)$ из G^{+} и G^{-} соответственно. Заметим, что в силу (3) $\varphi(z)$ голоморфна в G^{-} и обращается в нуль на бесконечности.

Дальше удобнее иметь однородное уравнение с неоднородным граничным условием. Для этого в задаче (4)–(6) проведем замену

$$\varphi=\varphi_0+\psi,$$

где

$$\varphi_0(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_G\Omega_1(\varsigma,z)g(\varsigma)d\xi d\eta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint_G\Omega_2(\varsigma,z)\overline{g(\varsigma)}d\xi d\eta,$$

$\Omega_1(\varsigma,z)$ и $\Omega_2(\varsigma,z)$ – нормированные ядра в G уравнения (4) ([2], с. 154), т.е. $\varphi_0(z)$ является частным решением неоднородного уравнения (4). Тогда для $\psi(z)$ получим однородное уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}}+A_2(z)\psi-B_2(z)\overline{\psi}=0 \qquad (7)$$

с неоднородным граничным условием на Γ

$$\psi_0^{+}(t)=a\psi_0^{-}(t)+d(t)\overline{\psi_0^{-}(t)}+h(t),$$

$$\psi^{-}(\infty)=0, \qquad (8)$$

где

$$h(t)=a(t)\varphi_0^{-}(t)+b(t)\overline{\varphi_0^{-}(t)}-\varphi_0^{+}(t).$$

При этом $\psi(z)$ голоморфна в G^{-}, непрерывна в $\overline{G^{-}}$ и обращается в нуль на бесконечности. Легко видеть, что задачи (4)–(6) и (7)–(8) эквивалентны, они одновременно разрешимы или неразрешимы.

Общую задачу линейного сопряжения (7)–(8) можно свести к более простой матричной задаче Римана–Гильберта для кусочно-обобщенной аналитической вектор-функции. С этой целью перейдем в граничном условии (8) к комплексно-сопряженным значениям:

$$\psi^{+}(t)=a\psi^{-}(t)+b(t)\overline{\psi^{-}(t)}+h(t), \qquad (9)$$

$$\overline{\psi^{+}(t)}=\overline{b(t)}\psi^{-}(t)+\overline{a(t)}\overline{\psi^{-}(t)}+\overline{h(t)}.$$

и введем новые неизвестные функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ следующим образом

$$\Phi_1^{+}(z)=\psi^{+}(z),\ \text{в } G^{+}, \qquad \Phi_1^{-}(z)=\psi^{-}(z),\ \text{в } G^{-}. \quad (10)$$

$$\Phi_2^{+}(z)=\frac{1}{z}\overline{\psi^{-}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}, \qquad \Phi_2^{-}(z)=\frac{1}{z}\overline{\psi^{+}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)},$$

Ясно, что $\Phi_1^{-}(z)$ голоморфна в G^{-}, $\Phi_2^{+}(z)$ голоморфна в G^{+}, притом $\Phi_1^{-}(\infty)=\Phi_2^{-}(\infty)=0$. Для граничных значений на Γ имеем:

$$\Phi_1^{+}(t)=\psi^{+}(t),\quad \Phi_1^{-}(t)=\psi^{-}(t), \qquad (11)$$

$$\Phi_2^{+}(t)=\frac{1}{t}\overline{\psi^{-}\left(\frac{1}{\overline{t}}\right)}=\overline{t\psi^{-}(t)},\ \Phi_2^{-}(t)=\frac{1}{t}\overline{\psi^{+}\left(\frac{1}{\overline{t}}\right)}=\overline{t\psi^{+}(t)}.$$

[1)] $L_{p,2}(E)=\left\{f(z): f(z)\in L_p(G), |z|^{-2}f\left(\frac{1}{z}\right)\in L_p(G)\right\}.$

Из (6) и (10) получаем дифференциальные уравнения для $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ в E:

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial \bar{z}} + A_j(z)\Phi_j(z) + B_j(z)\overline{\Phi_j(z)} = 0,$$

$$(j = 1,2), \qquad (12)$$

где $A_1(z)$ и $B_1(z)$ данные выше в (5) коэффициенты

$$A_2(z) = \begin{cases} 0, & z \in G^+, \\ -\dfrac{1}{\bar{z}^2} A_1\left(\dfrac{1}{z}\right), & z \in G^-. \end{cases}$$

$$B_2(z) = \begin{cases} 0, & z \in G^+, \\ -\dfrac{1}{|z|^2} B_1\left(\dfrac{1}{z}\right), & z \in G^-. \end{cases}$$

Таким образом, вектор-функция $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \Phi_2(z))$ удовлетворяет уравнению в E:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} + A(z)\Phi(z) + B(z)\overline{\Phi(z)} = 0, \quad (13)$$

с матричными коэффициентами $A = \left(A_j \delta_{jk}\right)_1^2$ и $B = \left(B_j \delta_{jk}\right)_1^2$, δ_{jk} – символ Кронекера, принадлежащими $L_{p,2}(E)$, $p > 2$.

Из выражений (9) и (11) получаем граничное условие

$$\Phi^+(t) = D(t)\Phi^-(t) + H(t), \text{ (на } \Gamma), \qquad (14)$$

$$\Phi^-(\infty) = 0 \quad (\Phi^-(z) = O(|z|^{-1})\, z \to \infty),$$

где

$$D(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{|a(t)|^2 - |b(t)|^2}{\overline{a(t)}} & \dfrac{\overline{tb(t)}}{\overline{a(t)}} \\ -\dfrac{tb(t)}{\overline{a(t)}} & \dfrac{1}{\overline{a(t)}} \end{pmatrix},$$

$$H(t) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\overline{a(t)}h(t) - b(t)\overline{h(t)}}{\overline{a(t)}} \\ -\dfrac{\overline{th(t)}}{\overline{a(t)}} \end{Bmatrix}.$$

Легко видеть, что матрица G(t) и вектор H(t) принадлежат $C_\alpha(\Gamma)$, $\alpha = \dfrac{p-2}{p}$, и $\det D(t) \neq 0$ на Г. Решения уравнений (12) предоставляются в виде ([2], с.154)

$$\Phi_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^{(j)}(z,t,G^*)F_j(t)dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_2^{(j)}(z,t,G^*)\overline{F_j(t)}d\bar{t}, \ (j = 1,2). \qquad (15)$$

Здесь и в дальнейшем $G^* = G^+$ при j=1, $G^* = G^-$ при j=2, и $\Omega_1^{(j)}(z,t,G^*)$ и $\Omega_2^{(j)}(z,t,G^*)$, (j=1,2) – ядра класса $L_{p,2}(E)$, $p > 2$, нормированные в G^+ для j=1, нормированные в G^- для j=2; $F_j(t) \in L_p(E)$, p>2 (j=1,2) – неизвестные функции. При этом для граничных значений из G^+ и G^- функций $\Phi_j(z)$ из (15) имеют место формулы [2]:

$$\Phi_j^+(t) = \frac{1}{2}F_j(t) + \frac{1}{2}(S_j F_j)(t),$$

$$\Phi_j^-(t) = -\frac{1}{2}F_j(t) + \frac{1}{2}(S_j F_j)(t),$$

где

$$S_j F_j = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^{(j)}(t,\tau,G^*)F_j(\tau)d\tau -$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_2^{(j)}(t,\tau,G^*)\overline{F_j(\tau)}d\bar{\tau}, \ (j = 1,2).$$

Пусть J^0 – единичный оператор в $C_\alpha(\Gamma)$, тогда проекционные операторы $P_j = (J^0 + S_j)$ и $Q_j = (J^0 - S_j)$, (j=1,2), дополняет друг друга и непрерывны в $C_\alpha(\Gamma)$, т.е.

$$P_j^{\,2} = P, \ Q_j^{\,2} = Q, \qquad (16)$$

$$P_j Q_j = Q_j P_j = 0, \quad P_j + Q_j = J^0, \quad (j = 1,2).$$

При этом вектор-функция $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \Phi_2(z))$ представляется в виде:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,t,E)F(t)dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_2(z,t,E)\overline{F(t)}d\bar{t}, \qquad (17)$$

где

$$\Omega_j(z,t,E) = \begin{pmatrix} \Omega_j^{(1)}(z,t,G^+) & 0 \\ 0 & \Omega_j^{(2)}(z,t,G^-) \end{pmatrix},$$

$$(j = 1,2).$$

Для граничных значений $\Phi^{\pm}(t)$ имеем:

$$\Phi^{+}(t)=\frac{1}{2}F(t)+\frac{1}{2}(SF)(t),$$

$$\Phi^{-}(t)=-\frac{1}{2}F(t)+\frac{1}{2}(SF)(t),$$

где

$$F(z)=(F_1(z),F_2(z)),\ S=\{S_j\delta_{jk}\}_1^2,$$

$$(SF)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(t,\tau,E)F(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_2(t,\tau,E)\overline{F(\tau)}d\bar{\tau}.$$

Соответствующие проекционные операторы

$$P=(J+S),\ Q=(J-S),$$

где $J=\begin{pmatrix} J^0 & 0 \\ 0 & J^0 \end{pmatrix}$ – матричный единичный оператор, взаимно дополняют друг друга и непрерывны в $C_\alpha(\Gamma)$:

$$P^2=P,\ Q^2=Q,$$

$$P+Q=J,\ PQ=QP=0. \qquad (18)$$

В дальнейшем тот факт, что P и Q относятся к формуле (17), соответствующей уравнению (13) с коэффициентами $A(z)$ и $B(z)$ будем писать в виде $P,Q\approx A,B$. Тогда задача (13)-(14) перепишется в виде

$$LF\equiv PF+DQF=H(t). \qquad (19)$$

Неособенная матрица $D(t)$ с непрерывными по Гёльдеру элементами допускает следующую факторизацию ([6], с.303)

$$D(t)=D_+(t)N(t)D_-(t),$$

где $N(t)$ – диагональная матрица вида $N(t)=(t^{\kappa_j}\delta_{jk})_1^2$, $(t\in\Gamma)$, $\kappa_1>\kappa_2$ - некоторые числа, называемые индексами матрицы $D(t)$, и $D_\pm(t)$ - квадратные матрицы второго порядка, допускающие аналитические продолжения в области $G^\pm$ и непрерывные в $\overline{G^\pm}$, причем

$$\det D_+(z)\neq 0\ \ (z\in G^+),$$

$$\det D_-(t)\neq 0\ \ (z\in G^-).$$

При этом выражение (19), в силу (18), перепишется в виде:

$$LF\equiv(P+DQ)F=(P+D_+ND_-Q)F=H. \qquad (20)$$

Далее имеем

$$P+D_+ND_-Q=D_+(D_+^{-1}P+ND_-Q)=$$
$$=D_+(P'+NQ')(D_+^{-1}P+D_-Q). \qquad (21)$$

где

$$P',Q'\approx\begin{cases} D_+^{-1}AD_+^{-1},D_+^{-1}B\overline{D_+^{-1}}, & z\in G^+,\\ D_-AD_-,D_-B\overline{D_-^{-1}}, & z\in G^-,\end{cases}$$

есть непрерывные проекционные операторы, обладающие свойствами вида (18) [7]. Тогда непосредственно проверяется, что крайние (слева и справа) операторы в (21) имеют ограниченные обратные, равные соответственно D_+^{-1} и $D_+P+D_-^{-1}Q$, а оператор $P'+NQ'$ ограниченно обратим, обратим слева или обратим справа, в зависимости от того $\kappa_j=0,\kappa_j\le 0$ или $\kappa_j\ge 0$ (j=1,2).

Таким образом, если $\kappa_j\ge 0$, то уравнение (21) разрешимо в $L_p(\Gamma)$ для всех p>2, его решение имеет вид

$$F(t)=(D_+P+D_-^{-1}Q)(P'+NQ')^{[-1]}D_+^{-1}H, \qquad (22)$$

где $(P'+NQ')^{[-1]}=(P'+N^{[-1]}Q')$, $N^{[-1]}=$ $=(t^{-\kappa_j}\delta_{jk})_1^2$ есть обратный оператор для ($P'+NQ'$), если все $\kappa_j=0$ (j=1,2). Следовательно, в этом случае (22) есть единственное решение уравнения (20). Если $\kappa_j\ge 0$ (j=1,2), то $(P'+NQ')^{[-1]}$ есть правый обратный для оператора ($P'+NQ'$).

При $\kappa_j\le 0$ (j=1,2), если (21) разрешимо, то его решение имеет тот же вид (23), где $(P'+NQ')^{[-1]}$ – левый обратный для ($P'+NQ'$).

Из наших предыдущих рассуждений непосредственно видно, что зная $F(t)\in L_p(\Gamma)$, p>2, можем однозначно определить функцию $\rho(t)\in L_p(\Gamma)$, p>2, являющуюся решением сингулярного интегрального уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зигмунд А., Кальдерон А.* On existence of certain integrals // Acta Math. V. 88(1952). 85-139.
2. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М., 1987.
3. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. ФМЛ., 1962.
4. *Джураев А.Дж.* Метод сингулярных интегральных уравнений. М., 1987.
5. *Виноградов В.С.* О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения // ДАН СССР. 1978. Т. 241, № 2.
6. *Прёсдорф З.* Некоторые классы сингулярных интегральных уравнений М.: Мир, 1979.
7. *Дадиомов В.М.* Граничные задачи для эллиптических уравнений на плоскости. Канд. дисс. Алма-Ата, 1990.

Резюме

Екі өлшемді бір ерекше интегралдық теңдеудің L_p, $p > 2$, кеңістігінде шешімді болу мәселелері зерттелген. Жұмыстың зерттеу тәсілі күрделірек жағдайларда да қолданыс табады.

Summary

In this paper, we study a solvability in L_p, $p > 2$, of one two – dimensional singular integral equation. The method of paper is suitable for the more general cases.

Институт математики МОН РК *Поступила 2.03.07г.*