УДК 517.927.25

М. Б. ИВАНОВА

О БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРИ ДРУГОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлена академиком Т. Ш. Кальменовым)

В данной работе известный критерий безусловной базисности переносится на случай другого определения присоединенных функций

Настоящая заметка представляет собой дальнейшее развитие исследований по безусловной базисности систем собственных и присоединенных функций дифференциальных операторов, начало которым было положено В. А. Ильиным [1].

В работе [1] им был рассмотрен дифференциальный оператор второго порядка, который сводится к оператору Шредингера

$$Lu = -u'' + q(x)u\ , \tag{1}$$

заданного на некотором интервале $G = (-R, R)$, комплекснозначный потенциал $q(x)$ которого принадлежит классу $L_1(G)$. При этом цепочки присоединенных функций, отвечающих фиксированному собственному значению λ_0, были построены по формуле

$$Lu_k = \lambda_0 u_k + u_{k-1}\,.$$

Недостатки этой формулы, вытекающей из теории присоединенных функций М. В. Келдыша (см., например, [2. С.29]), были обнаружены В. А. Ильиным при изучении вопросов базисности системы собственных и присоединенных функций одной несамосопряженной спектральной задачи [3].

В работе [4] М. А. Садыбековым и А. М. Сарсенби было предложено новое определение присоединенных функций несамосопряженных дифференциальных операторов. Если A – некоторый дифференциальный оператор, то присоединенные функции оператора A, отвечающие фиксированному собственному значению λ_0, можно определить по формуле

$$Au_k = \lambda_0 (u_k + u_{k-1})\,. \tag{2}$$

В данной работе теорема В. А. Ильина о безусловной базисности [1] переносится на тот случай, когда присоединенные функции строятся по формуле типа (2).

Рассмотрим оператор L вида (1). Собственные и присоединенные функции оператора L будем понимать в обобщенном смысле В. А. Ильина.

Под собственной функцией оператора (1), отвечающей комплекснозначному собственному значению λ, будем понимать любую не равную тождественному нулю комплекснозначную функцию $u_0(x)$ из класса $L_2(G)$, которая абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной в интервале G и удовлетворяет почти всюду в интервале G уравнению

$$Lu_0 = \lambda u_0\,.$$

Аналогично под присоединенной функцией этого оператора порядка $l = 1, 2, ...,$ отвечающей тому же λ и собственной функции $u_0(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $u_k(x)$ из класса $L_2(G)$, которая абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной в интервале G и удовлетворяет почти всюду в интервале G уравнению (2).

Теорема. Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система, состоящая из понимаемых в указанном выше обобщенном смысле собственных и присоединенных функций оператора (1), и пусть выполнены три следующих условия:

1) комплекснозначный потенциал $q(x) \in L_1(G)$;

2) существуют такие две постоянные M_1 и M_2, что собственные значения λ_k удовлетворяют неравенствам

$$\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_k}\right| \le M_1,$$

$$\sum_{t \le \left|\sqrt{\lambda_k}\right| \le t+1} 1 \le M_2 \text{ (для всех } t \ge 0\text{)}; \qquad (3)$$

3) система $\{v_k(x)\}$, биортогонально сопряженная в $L_2(G)$ к системе $\{u_k(x)\}$, состоит из понимаемых в указанном выше обобщенном смысле собственных и присоединенных функций дифференциального оператора

$$L^* v = -v'' + \overline{q}(x)v,$$

формально сопряженного к дифференциальному оператору (1).

При выполнении этих трех условий необходимым и достаточным условием безусловной базисности в $L_2(G)$ системы $\{u_k(x)\}$ является существование постоянной C, обеспечивающей справедливость для всех номеров k неравенства

$$\|u_k(x)\|_{L_2(G)} \cdot \|v_k(x)\|_{L_2(G)} \le C. \qquad (4)$$

Доказательство. Необходимость условия (4) для произвольных базисов, не связанных с дифференциальным оператором, хорошо известна [5. С. 372]. Поэтому докажем только достаточность условия (4).

Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система, удовлетворяющая условию теоремы, а $\{v_k(x)\}$ – система, биортогонально сопряженная к $\{u_k(x)\}$ в $L_2(G)$. Биортогональные разложения произвольной функции $f(x) \in L_2(G)$ по каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{v_k(x)\}$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k) v_k, \quad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (f, v_k) u_k.$$

Очевидно, что выписанные биортогональные разложения совпадают с биортогональными разложениями той же функции по системам $\left\{u_k \|u_k\|_{L_2(G)}^{-1}\right\}$ и $\left\{v_k \|u_k\|_{L_2(G)}\right\}$. Поэтому безусловная базисность в $L_2(G)$ систем $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$ оказывается эквивалентной безусловной базисности в $L_2(G)$ систем $\left\{\dfrac{u_k}{\|u_k\|_{L_2(G)}}\right\}$, $\left\{v_k \|u_k\|_{L_2(G)}\right\}$, причем первая из последних двух систем нормирована в $L_2(G)$, а вторая – почти нормирована (в силу (4)).

Таким образом, безусловная базисность систем $\{u_k(x)\}$ и $\{v_k(x)\}$ эквивалентна базисности Рисса систем $\left\{\dfrac{u_k}{\|u_k\|_{L_2(G)}}\right\}$, $\left\{v_k \|u_k\|_{L_2(G)}\right\}$ (по теореме Лорча [5. С. 381]). Последнее, по опреде-лению базисов Рисса и известной теоремы Н. К. Бари [5. С. 375] эквивалентна бесселевости каждой из систем $\left\{\dfrac{u_k}{\|u_k\|_{L_2(G)}}\right\}$, $\left\{v_k \|u_k\|_{L_2(G)}\right\}$. Эти системы называются бесселевыми, если для любой функции $f(x) \in L_2(G)$ выполнены условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(f, u_k \|u_k\|_{L_2(G)}^{-1}\right)\right|^2 \le C_1 \|f\|_{L_2(G)}^2, \qquad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(f, v_k \|u_k\|_{L_2(G)}\right)\right|^2 \le C_2 \|f\|_{L_2(G)}^2. \qquad (5a)$$

В силу неравенства (4)

$$1 = (u_k, v_k) \le \|u_k\|_{L_2(G)} \|v_k\|_{L_2(G)} \le C,$$

условие (5а) эквивалентно условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(f,\, v_k)\right|^2 \left\|v_k\right\|_{L_2(G)}^{-2} \le C_3 \left\|f\right\|_{L_2(G)}^2. \qquad (6)$$

Итак, для доказательства безусловной базисности системы $\{u_k(x)\}$ достаточно доказать неравенства (5) и (6). Но, поскольку системы $\{u_k(x)\}$ и $\{v_k(x)\}$ подчинены одинаковым условиям, то достаточно доказать сходимость ряда (5), для чего достаточно будет убедиться в справедливости неравенств

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^R u_k(r)\overline{f(r)}dr\right|^2 \cdot \left\|u_k\right\|^{-2} \le \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_{-R}^0 u_k(r)\overline{f(r)}dr\right|^2 \cdot \left\|u_k\right\|^{-2} \le \infty, \qquad (7)$$

где $G=(-R,\, R)$.

Обозначим $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$, $\operatorname{Re}\mu_k \ge 0$.

Так как при суммировании по всем номерам k, для которых $|\mu_k| \le 1$, справедливость неравенств (7) тривиально вытекает из неравенства Коши–Буняковского и второй оценки (3), взятой при $t=0$, то всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только такие номера k, для которых $|\mu_k| > 1$.

Так как функция $u_k(x)$ почти всюду в G удовлетворяет уравнению

$$Lu_k = \lambda_k(u_k + u_{k-1}),$$

а коэффициент $q(x) \in L_1(G)$, то для любых x и r, для которых точки x и $x \pm r$ принадлежат интервалу G легко получится следующая формула «сдвига»

$$u_k(x \pm r) = u_k(x)\cos\mu_k r \pm u_k'(x)\cdot\frac{1}{\mu_k}\sin\mu_k r +$$

$$+\frac{1}{\mu_k}\int_0^1 u_k(x \pm t)q(x+t)\sin\mu_k(r-t)dt -$$

$$-\mu_k\int_0^r u_{k-1}(x \pm t)\sin\mu_k(r-t)dt. \qquad (8)$$

Можно показать, что при сформулированных нами условиях для функций $u_k(x)$ будут справедливы следующие три оценки (все нормы берутся в $L_2(G)$):

$$\sup_{x\in G}|u_k(x)| \le C_1\cdot\|u_k\|,\quad |u_k'(0)| \le C_2|\mu_k|\cdot\|u_k\|,$$

$$\|\theta_k u_{k-1}\| \le C_3|\mu_k|^{-1}\cdot\|u_k\|. \qquad (9)$$

Умножая формулу среднего значения (8), взятую при x=0 для случая знака +, на $\overline{f(r)}$ и интегрируя получающееся при этом равенство по r в пределах от 0 до R, убедимся в том, что для доказательства первого неравенства (7) в силу оценок (9) достаточно установить следующие соотношения:

$$\sum_{|\mu_k|>1}\left|\int_0^R \overline{f(r)}\cdot\cos\mu_k r\cdot dr\right|^2 < \infty,$$

$$\sum_{|\mu_k|>1}\left|\int_0^R \overline{f(r)}\cdot\sin\mu_k r\cdot dr\right|^2 < \infty, \qquad (10)$$

$$\sum_{|\mu_k|>1}|\mu_k|^{-2}\int_0^R\left[\int_0^r |q(t)|\cdot|\sin\mu_k(t-r)|dt\right]^2 dr < \infty, \qquad (11)$$

$$\sum_{|\mu_k|>1}|\mu_k|^2\cdot\|u_k\|^{-2}\times$$

$$\times\left|\int_0^R \overline{f(r)}\left[\int_0^r \theta_k u_{k-1}(t)\cdot\sin\mu_k(t-r)dt\right]dr\right|^2 < \infty. \qquad (12)$$

Справедливость неравенства (11) при $q(x)\in L_1(G)$ вытекает из того, что $|\sin\mu_k(t-r)| \le C$ для всех номеров k и всех $0\le t\le r\le R$ (в силу первого условия (3)), а ряд $\sum|\mu_k|^{-2}$ сходится (в силу второго условия (3)).

Для доказательства неравенства (10) и (12) заметим, что в силу условий (2) последовательность $\{\mu_k\}$ можно расслоить на сумму конечного числа последовательностей, в каждой из которых содержится не более чем один элемент μ_k, удовлетворяющий условиям

$$\frac{2\pi}{R}k \le |\mu_k| < \frac{2\pi}{R}(k+1),$$

$$\mu_k = \pm\frac{2\pi}{R}k + \delta_k, \qquad |\delta_k| \le C\,.$$

Достаточно доказать (10) и (12) для каждой из таких последовательностей.

Из устанавливаемого интегрированием по частям равенства

$$\int_0^R \overline{f(r)}\cos\mu_k r dr = \int_0^R \overline{f(r)}\cos\left(\pm\frac{2\pi}{R}kr + \delta_k r\right)dr =$$

$$= \int_0^R \overline{f(\rho)}\cos\left(\frac{2\pi}{R}k\rho\right)d\rho -$$

$$-\int_0^R \delta_k \sin(\delta_k r)\left[\int_r^R \overline{f(\rho)}\cos\left(\frac{2\pi}{R}k\rho\right)d\rho\right]dr \ \mu$$

$$\mu\int_0^R \delta_k \cos(\delta_k r)\left[\int_r^R \overline{f(\rho)}\sin\left(\frac{2\pi}{R}k\rho\right)d\rho\right]dr$$

в силу неравенства Бесселя для тригонометрической системы и ограниченности величин δ_k, $\sin(\delta_k r)$, $\cos(\delta_k r)$ вытекает справедливость первого неравенства (10). Второе неравенство (10) устанавливается аналогично. С помощью соотношения

$$\int_0^R \overline{f(r)}\left[\int_0^r u_{k-1}(t)\sin dt\right]dr =$$

$$= \int_0^R u_{k-1}(t)\left[\int_t^R \overline{f(r)}\sin\mu_k(t-r)dr\right]dt$$

неравенства Коши–Буняковского и третьей оценки (9) по той же схеме доказывается неравенство (12). Тем самым, первое неравенство (7) доказано.

Второе неравенство (7) доказывается аналогично с помощью формулы среднего значения (8), взятой для случая знака минус.

Автор благодарит участников научного городского семинара под руководством доктора физико-математических наук М. А. Садыбекова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // ДАН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048-1053.

2. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы // М.: Наука, 1969. 528 с.

3. *Ильин В.А.* О существовании приведённой системы собственных и присоединённых функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Труды Мат. института АН СССР им. Стеклова. 1976. Т. 142. С. 148-155.

4. *Садыбеков М.А., Сарсенби А.М.* Новое определение присоединенных функций несамосопряженных дифференциальных операторов // Доклады НАН РК. 2006. №6. С. 13-17.

5. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.

Резюме

Қосымша алынған функцияларды басқаша анықтаған жағдайда түпкілікті функциялардың шартсыз базистігін қамтамасыз ететін белгілі қажетті және жеткілікті шарттар дұрыс болып қала беретіндігі көрсетілген.

Summary

In this work famous criterion of nonconditional basisnes have been used in the case of another definition of joined functions.

Поступила 6.04.07г.